# Informatik I: Einführung in die Programmierung

## 29. Constraint Satisfaction, Backtracking und Constraint Propagierung

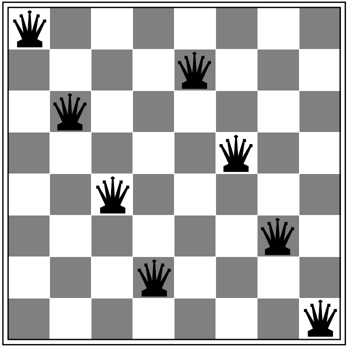
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Bernhard Nebel

06.02.2018

# 1 Motivation

# Schwierige Probleme (1)



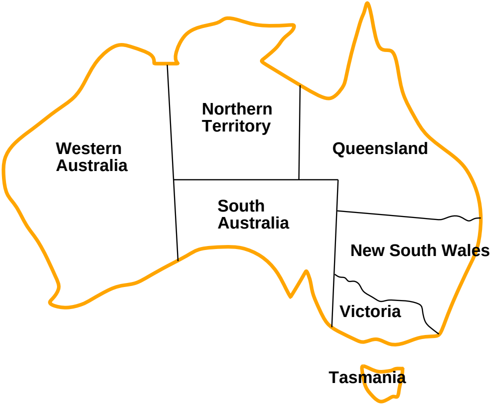
Platziere die 8 Damen so, dass sie sich nicht schlagen können

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 9 | | | 7 | 2 | 8 |
| 2 | 7 | 8 | | | 3 | | 1 | |
| | 9 | | | | | 6 | 4 | |
| | 5 | | | 6 | | 2 | | |
| | | 6 | | | | 3 | | |
| | 1 | | | 5 | | | | |
| 1 | | | 7 | | 6 | | 3 | 4 |
| | | | 5 | | 4 | | | |
| 7 | | 9 | 1 | | | 8 | | 5 |

Fülle die leeren Felder entsprechend der Sudoku-Regeln

# Schwierige Probleme (2)






Färbe die australischen Bundesstaaten so mit drei Farben ein, dass zwei aneinander stoßende Staaten nicht die gleiche Farbe haben.

# Wo liegt der Fehler auf der letzten Folie?



Sicht auf die ANU (Australian National University) und den Telstra-Turm in der Hauptstadt Canberra.  Canberra liegt innerhalb des *Australian Capital Territory* (ACT), das wiederum innerhalb von NSW liegt.

- 3-Färbbarkeit
- 8-Damen-Problemen
- Sudoku (1)

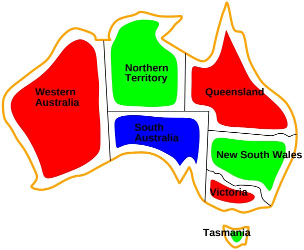
# Was haben 8 Damen, Sudokus, und das Färben einer Landkarte gemeinsam?



- Es handelt sich um kombinatorische Probleme, auch Constraint-Satisfaction-Probleme (CSP) genannt:
  - Es existieren $n$ Variablen $X_i$, die Werte aus einem Bereich $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_m\}$ annehmen können.
  - Es gibt Bedingungen (Constraints) für die Belegung der Variablen, die erfüllt sein müssen, z.B. $X_i \neq X_{2i}$ für alle $i$.
  - Eine Lösung eines CSP ist eine Belegung der Variablen mit Werten, so dass alle Constraints erfüllt sind.
- Diese Probleme zeichnen sich dadurch aus, dass der Raum der möglichen Lösungen (der Suchraum) oft astronomisch groß ist, und deshalb nicht vollständig abgesucht werden kann.
- Beispiel Sudoku: Meist müssen $81 - 17 = 64$ Felder mit den Ziffern 1 bis 9 belegt werden. Das sind $9^{64} \approx 10^{61}$ Möglichkeiten.

# Australien einfärben

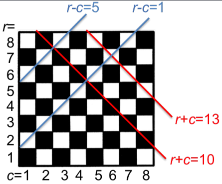
- Wir haben 7 CSP-Variablen: $WA, NT, SA, Q, NSW, V, T$.
- Diese können die Werte *red*, *blue*, *green* annehmen.
- Die Constraints sind: $WA \neq NT, WA \neq SA, NT \neq SA, NT \neq Q, SA \neq Q, SA \neq NSW, SA \neq V, Q \neq NSW, NSW \neq V$.
- Eine mögliche Lösung wäre:
  $WA = red$, $NT = green$, $SA = blue$, $Q = red$, $NSW = green$, $V = red$, $T = green$.



# 8 Damen platzieren (1)

- 16 CSP-Variablen: $R_i, C_i$ (row, column) für die Damen $i = 1, \ldots, 8$
- 8 verschiedene Werte: $k = 1, \ldots, 8$ (für die jeweilige Reihe oder Spalte)
- Constraints:
  1. $R_i \neq R_j$ für alle $i \neq j$ (die Damen sollen in unterschiedlichen Reihen stehen)
  2. $C_i \neq C_j$ für alle $i \neq j$ (die Damen sollen in unterschiedlichen Spalten stehen)
  3. die Damen sollen nicht auf einer gemeinsamen Diagonalen stehen

# 8 Damen platzieren (2): Diagonalen-Constraints




- Auf dem Schachbrett kann man die Diagonalen durch Summen bzw. Differenzen der Reihen- und Spalten-Indizes charakterisieren.
- Die Diagonalen von links oben nach rechts unten haben konstante Summen, die alle verschieden sind.
- D.h. $R_i + C_i \neq R_j + C_j$ für alle Damen $i, j$ mit $i \neq j$ beschreibt die gewünschten Constraints.
- Die Diagonalen von links unten nach rechts oben haben konstante Differenzen, die ebenfalls alle verschieden sind.
- D.h. $R_i - C_i \neq R_j - C_j$ für $i \neq j$ sind die Constraints.

# Damen platzieren (3): Suchraum-Reduktion

- Es dauert rund $10^{-6}$ Sekunden, um eine Stellung zu testen.
- Wir können die erste Dame auf 64 verschiedene Felder stellen, die zweite auf 63, ...
- Wir haben $64!/(64-8)! \approx 1.8 \cdot 10^{14}$ Möglichkeiten. D.h. wir brauchen rund $1.8 \cdot 10^{8}$ Sekunden $\approx$ 7 Jahre Rechenzeit, um alle Stellungen zu testen.
- Da die Damen aber nicht unterscheidbar sind, und in jeder Reihe genau eine Dame stehen muss, können wir die Reihenvariaben mit $R_i = i$ vorbelegen.
- Damit ergeben sich dann nur noch $8^8 \approx 1.7 \cdot 10^7$ Möglichkeiten, entsprechend 17 Sekunden Rechenzeit.

# Sudoku

- Ein Sudoku-Feld besteht aus 81 Zellen, in denen jeweils die Ziffern 1 bis 9 eingetragen werden sollen.
- Diese werden gerne wie folgt durchnummeriert:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 |
| B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | B7 | B8 | B9 |
| C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 |
| D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | D6 | D7 | D8 | D9 |
| E1 | E2 | E3 | E4 | E5 | E6 | E7 | E8 | E9 |
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 | F9 |
| G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 | G7 | G8 | G9 |
| H1 | H2 | H3 | H4 | H5 | H6 | H7 | H8 | H9 |
| I1 | I2 | I3 | I4 | I5 | I6 | I7 | I8 | I9 |

- Jeweils neun Zellen einer Zeile, einer Spalte oder eines Blocks bilden eine Gruppe.
- In jeder Gruppe müssen die Ziffern 1 bis 9 genau einmal vorkommen.
- Für eine gegebene Zelle heißen alle Zellen, die in einer Gruppe mit dieser Zelle vorkommen, *Peers* dieser Zelle.
- Die Peers einer Zelle müssen alle einen anderen Wert als die Zelle haben!

# Sudoku (2): CSP-Formulierung



- Wir haben 81 CSP-Variablen: A1 ... I8,
- Diese können die Werte 1, 2, ... 9 annehmen.
- Die Constraints sind: Jede Zelle muss einen Wert besitzen, der verschieden ist von den Werten ihrer Peers.

# Sudoku (3): Suchraum

- Der Suchraum hat in den meisten Fällen (17 Vorgaben) eine Größe von ca. $10^{61}$ möglichen Kombinationen.
- Würden wir eine Milliarde ($10^9$) Kombinationen pro Sekunde testen können, wäre die benötigte Rechenzeit $10^{61}/(10^9 \cdot 3 \cdot 10^7) \approx 3 \cdot 10^{44}$ Jahre.
- Die Lebensdauer des Weltalls wird mit $10^{11}$ Jahren angenommen (falls das Weltall geschlossen ist).
- Selbst bei einer Beschleunigung um den Faktor $10^{30}$ würde die Rechnung nicht innerhalb der Lebensdauer des Weltalls abgeschlossen werden können.
- Trotzdem scheint das Lösen von Sudokus ja nicht so schwierig zu sein …

# 3 Backtracking-Suche

- Oz-Backtracking
- 8-Damen-Backtracking
- Sudoku-Backtracking

# Abkürzungen wählen

- Bei den genannten Abschätzungen wurde ja immer davon ausgegangen, dass wir immer alle CSP-Variablen mit Werten belegen und dann testen, ob es eine Lösung ist.
- Dabei würden wir aber viele Kombinationen testen, die ganz offensichtlich keine Lösungen sind.
- Wenn z.B. beim Australienproblem *WA* und *NT* mit der gleichen Farbe belegt wurden, dann werden alle Vervollständigungen keine Lösung sein!
- Man kann an dieser Stelle abkürzen und z.B. für *NT* eine andere Farbe ausprobieren.
- Idee: Schrittweise Werte an CSP-Variablen zuweisen, wobei die Constraints der schon zugewiesenen CSP-Variablen immer erfüllt sein müssen.
- Wichtig: Dabei muss man manchmal auch Entscheidungen rückgängig machen, wenn wir keine Vervollständigung finden können.

# Rekursive Suche mit Rücksetzen

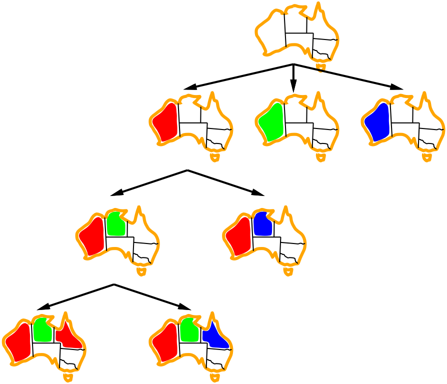
1. Wähle eine noch unbelegte CSP-Variable aus.
2. Weise der CSP-Variablen einen Wert zu, der alle Constraints mit schon belegten CSP-Variablen erfüllt.
3. Versuche rekursiv eine Belegung für die restlichen CSP-Variablen zu finden.
4. Gelingt dies, sind wir fertig und geben die Belegung zurück.
5. Nimm ansonsten die Belegung der CSP-Variablen zurück, wähle einen bisher noch nicht ausprobierten Wert und belege die CSP-Variable damit. Mache mit Schritt 3 weiter.
6. Wurden alle Werte erfolglos probiert, gebe `False` zurück.

Man nennt diese Art der Suche auch Backtracking-Suche, da man im Schritt 5 einen Schritt zurück nimmt und etwas anderes probiert.

Statt Rücksetzen kann man beim rekursiven Aufruf in Schritt 3 natürlich eine Kopie der Variablenbelegung nutzen.

# Backtracking in Oz

Für unser Beispiel zum Einfärben der australischen Landkarte könnte das so aussehen:



# Backtracking in Oz – mit Python (1)



## oz.py(1)

```
varlist = ('WA', 'NT', 'SA', 'Q', 'NSW', 'V', 'T' )
domain = ('red', 'green', 'blue')
neighbor = dict(WA={'NT', 'SA'}, NT= {'WA', 'SA', 'Q'},
            SA={'WA', 'NT', 'Q', 'NSW', 'V'},
            Q={'NT', 'SA', 'NSW'}, NSW={'Q', 'SA', 'V'},
            V ={'SA', 'NSW'}, T={})
```

- Variablennamen und Werte als Strings innerhalb von Tupeln aufzählen.
- Constraints als ein `dict`, in dem für jeden Staat die Nachbarstaaten angegeben werden.
- Belegungen werden über `dicts` realisiert, die dynamisch wachsen.

# Backtracking in Oz – mit Python (2)



- Um ein Element aus einer Liste zu wählen, benutzen wir die Funktion `some`:

oz.py(2)

```
def some(seq):
    for e in seq:
        if e: return e
    return False
```

- Funktioniert ähnlich wie `any`, gibt aber ein Element zurück, wenn ein nicht-`False` Element vorhanden ist.

# Backtracking in Oz – mit Python (3)

- Die Funktion `assign(vals, x, d)` führt die Zuweisung des Wertes `d` an die CSP-Variable `x` durch:

oz.py(3)

```
def assign(vals, x, d):
    "assign d to var x if feasible, otherwise return False"
    for y in vals:
        if x in neighbor[y] and vals[y] == d:
            return False
    vals[x] = d
    return vals
```

- `vals` ist das `dict`, in dem die Belegung aufgebaut wird.
- Erst testen, ob der Wert `d` ein möglicher Wert für die Variable `x` ist, indem die Constraints für bereits belegte CSP-Variablen überprüft werden.
- Falls nicht, `False` zurück geben.
- Ansonsten wird `vals` erweitert und zurück gegeben.

# Backtracking in Oz – mit Python (4)

oz.py(4)

```
def search(vals):
  "Recursively search for a satisfying assignment"
  if vals is False: return False # failed earlier
  nextvar = some(x for x in varlist if x not in vals)
  if not nextvar:
    return vals # we have found a complete assignment
  else:
    return some(search(assign(vals.copy(), nextvar, d))
                for d in domain)
```

- `vals` kann `False` werden, wenn `assign` einen Wert nicht zulässt.
- `vals` wird vor jedem Aufruf von assign kopiert!
- Dann müssen wir die Belegung nicht nach dem rekursiven Aufruf rückgängig machen.

# Backtracking in Oz – mit Python (5)

oztrace.py

```
def assign(vals, x, d):
    print(" "*len(vals), "check value %s for var %s" % (d, x))
    for y in vals:
        if x in neighbor[y] and vals[y] == d:
            print(" "*len(vals), "not possible!")
            return False
    print(" "*len(vals), "trying out ...")
    vals[x] = d
    return vals
```

## Python-Interpreter

```
>>> search(dict())
check value red for var WA
trying out ...
  check value red for var NT
  ...
```

# Backtracking in Oz – mit Python-Generatoren



- Erzeuge alle Lösungen mit einem Generator.
- Fehlschläge müssen nicht zurück geben werden.
- Achtung: Der rekursive Generator muss in einer `for`-Schleife aufgerufen werden.
- Essentiell: Kopieren von `vals`.

ozgen.py

```
def search(vals):
  "Recursively search for a satisfying assignment"
  if vals is not False:
    nextvar = some(x for x in varlist if x not in vals)
    if not nextvar:
      yield vals # we have found a complete assignment
    else:
      for d in domain:
        for result in search(assign(vals.copy(),
                                    nextvar, d)): yield result
```

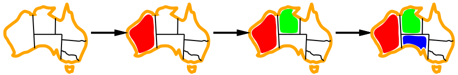
# Bemerkungen zur Backtracking-Suche: Variablenauswahl

Wie sollte man die nächste zu belegende CSP-Variable auswählen?

- Für die Korrektheit ist es egal, welche Variable man wählt.
- Es kann aber für die Laufzeit Unterschiede machen.

→ Eine gute Heuristik ist es, die Variable zu wählen, die die wenigsten noch möglichen Werte besitzt.

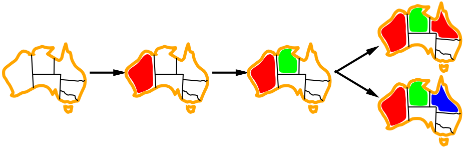
- Grund: Reduktion der Verzweigung im Aufrufbaum weit oben.
- Beispiel:



# Bemerkungen zur Backtracking-Suche: Werteauswahl

In welcher Reihenfolge sollte man die Werte durchprobieren?

- Für die Korrektheit egal.
- Wenn man schnell eine Lösung finden will, sollte man mit den Werten beginnen, die die anderen Variablen möglichst wenig einschränkt.
- Erfordert allerdings, dass wir voraus schauen und bestimmen, welche Werte bei anderen Variablen noch möglich sind.
- Beispiel:




- Wir werden im Weiteren aber sowohl Variablen- als auch Werte-Auswahl erst einmal einfach halten.

# Backtracking für 8 Damen – mit Python (1)



- Für die Problemrepräsentation beim 8-Dame-Problem bietet es sich an, die Belegung durch ein Tupel `col` zu repräsentieren, bei dem der $i$-te Eintrag für die Spalte steht, in der die $i$-te Dame steht, wobei Dame $i$ in der $i$-ten Reihe steht ($i = 0, \ldots, 7$).
- Die Constraints ergeben sich dann, wie weiter oben beschrieben.

## 8queens.py (1)

```
def assign(col, x, d):
    for y in range(len(col)):
        if col[y] == d: # same column?
            return False
        if (col[y] + y == d + x or # same diagonal?
            col[y] - y == d - x):
            return False
    return col + (d,) # return copy!
```

# Backtracking für 8 Damen – mit Python (2)

- Die eigentlich Suchfunktion sieht ganz ähnlich aus wie im Fall der 3-Färbbarkeit von Australien.
- Kopiert wird hier die neue Belegung bereits in `assign`, da wir mit Tupeln arbeiten.

8queens.py (2)

```
def search(col):
    if col is not False:
        nextvar = len(col)
        if nextvar == 8:
            return col
        else:
            for d in range(8):
                result = search(assign(col, nextvar, d))
                if result: return result
    return False
```

# Backtracking für 8 Damen – mit Python (3)



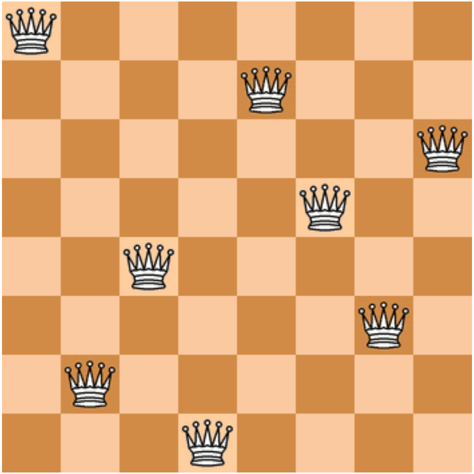
- Eigentlich würden wir ja gerne sehen, wie das Schachbrett dann aussieht.

8queens.py (3)

```
def display(col):
    for i in range(8):
        print(". "*col[i], "X ", ". "*(7-col[i]),
              sep="")

if __name__ == "__main__":
    display(search(()))
```

# Backtracking für 8 Damen



# Backtracking für 8 Damen - Generatoren



- Und wie sähe das aus, wenn wir Generatoren einsetzen wollten?
- Statt `return`, `yield`.
- Keine Fehlschläge, sondern nur die erfolgreichen Zweige weiter verfolgen!
- Aufrufe nur in `for`-Schleifen.
- Verschiedene Lösungen unterscheidbar machen (Leerzeile nach jeder Lösung).

# Backtracking für Sudokus (1): Adressierung der Felder

Die Formalisierung der Constraints ist aufwändig:

sudoku.py (1)

```
def cross(A, B):
    return [a+b for a in A for b in B]
digits   = '123456789'
digits0p = digits + '0.'
rows     = 'ABCDEFGHI'
cols     = digits
squares  = cross(rows, cols)
unitlist = ([cross(rows, c) for c in cols] +
            [cross(r, cols) for r in rows] +
            [cross(rs, cs) for rs in ('ABC','DEF','GHI')
                           for cs in ('123','456','789')])
units = dict((s, [u for u in unitlist if s in u])
             for s in squares) # s -> all units of s
peers = dict((s, set(sum(units[s],[]))-set([s]))
             for s in squares) # s -> set of peers of s
```

# Sudoku-Backtracking (2): Belegung und Constraints

- Belegungen werden wie im Falle der Färbbarkeit durch ein `dict` repräsentiert.
- Die CSP-Variablen sind durch die Liste `squares` gegeben: `['A1', 'A2', ..., 'A9', 'B1', 'B2', ..., 'I9']`
- `unitlist` ist eine Liste, deren Elemente Listen sind, die jeweils alle Felder einer Gruppe enthalten:
  `[['A1', 'B1', ..., 'I1'], ['A2', 'B2', ..., 'I2'], ..., ['A1', 'A2', ..., 'A9'], ..., ['A1', 'A2', 'A3', 'B1', 'B2', ...'C3'], ...]`
- `units` spezifiziert für jedes Feld, in welchen Gruppen es Mitglied ist:
  `{ 'A1': [['A1', ..., 'I1'], ['A1', ..., 'A9'], ['A1', ..., 'C3']], ...}`
- `peers` spezifiziert für jedes Feld die Menge der Peers:
  `{'D8': {'E9', 'E8', 'D9', 'G8', 'D2', 'D3', 'D1', 'D6', 'D7', ...}, ...}`

# Sudoku-Backtracking (3): Parsing

- Wir wollen ja verschiedene Sudokus lösen.
- D.h. wir müssen die Aufgabe parsen und in eine interne Struktur überführen.
- Aufgabe besteht aus 81 Zeichen 0 – 9 und '.', wobei 0 und '.' für ein leeres Feld stehen.
- Alle anderen Zeichen werden ignoriert. D.h. wir können die Aufgabe auch als Tabelle angeben.

## sudoku.py (2)

```
def parse_grid(grid):
  values = dict()
  for s,d in (zip(squares, [c for c in grid
                              if c in digits0p])):
    if d in digits and not assign(values, s, d):
      return False
  return values
```

# Sudoku-Backtracking (3): Ausgabe

- Die Lösungen sollen natürlich auch dargestellt werden.
- `display` gibt eine Belegung aus.

## sudoku.py (3)

```
def display(values):
    "Display values as a 2-D grid."
    if not values:
        print("Empty grid")
        return
    line = '+'.join(['-'*6]*3)
    for r in rows:
        print(''.join(values.get(r+c,'.')+ ' ' +
                      ('|' if c in '36' else '')
                     for c in cols))
        if r in 'CF': print(line)
    print()
```

# Sudoku-Backtracking (4): assign

- Die Zuweisung funktioniert wieder ähnlich wie in den beiden anderen Fällen.
- D.h. es werden die Constraints überprüft und im Erfolgsfall die erweiterte Belegung zurück gegeben.
- Ansonsten wird False zurück gegeben.

sudoku.py (4)

```
def assign(values, s, d):
    "Try to assign value d to square s"
    if s not in values and all(values[p] != d
                               for p in values
                               if p in peers[s]):
        values[s] = d
        return values
    return False
```

# Sudoku-Backtracking (5): Rekursive Suche

- Völlig analog zu den beiden vorherigen Fällen:

sudoku.py (5)

```
def search(values):
    "Search for solution"
    if not values: return False # failed earlier
    s = some(s for s in squares if s not in values)
    if not s: return values
    return some(search(assign(values.copy(), s, d))
                for d in digits)

import time

def timed_search(grid):
    start = time.process_time()
    search(parse_grid(grid))
    return time.process_time() - start
```

# Sudoku-Backtracking (6): In Aktion . . .



## Python-Interpreter

```
>>> grid1='''003020600 900305001 001806400 008102900
... 700000008 006708200 002609500 800203009
... 005010300'''
>>> display(search(parse_grid(grid1)))
4 8 3 |9 2 1 |6 5 7
9 6 7 |3 4 5 |8 2 1
2 5 1 |8 7 6 |4 9 3
------+------+------
5 4 8 |1 3 2 |9 7 6
7 2 9 |5 6 4 |1 3 8
1 3 6 |7 9 8 |2 4 5
------+------+------
3 7 2 |6 8 9 |5 1 4
8 1 4 |2 5 3 |7 6 9
6 9 5 |4 1 7 |3 8 2
```

# Sudoku-Backtracking (6): Performanz

## Python-Interpreter

```
>>> timed_search(grid1)
0.01417400000013913
>>> timed_search(grid2)
660.3158369999999
>>> timed_search(hard1)
24.770020000000002
>>> timed_search(hard2)
0.693335000000161
>>> timed_search(hard3)
28.898888999999826
```

- `hard1` und `hard2` sind zwei von dem finnischen Mathematiker Arto Inkala entworfene Sudokus, die er als „die schwersten“ Sudokus bezeichnet.
- `hard3` (von Peter Norvig) ist auch für Computer eine harte Nuss; aber es ist kein Sudoku, da nicht eindeutig.

# Backtracking: Fazit

- Mit Hilfe der Backtracking-Suche kann man auch sehr große Suchräume absuchen.
- Die Methode garantiert, dass wir eine Lösung finden, wenn eine existiert.
- Die tatsächlich notwendige Zeit kann stark schwanken.
- Können wir vielleicht weitere Abkürzungen bei der Suche einsetzen?

# 4 Constraint-Propagierung

- Die Idee
- Sudoku-Constraint-Propagierung

# Constraint-Propagierung: Die Idee



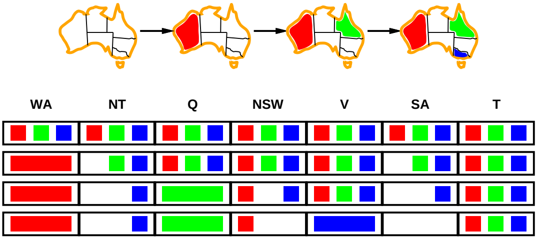
- Im Zusammenhang mit der Auswahl der nächsten Variable und des nächsten Wertes wurde bereits erwähnt, dass man die noch möglichen Werte pro Variable kennen sollte.
- Idee: Wann immer ein Wert fest gelegt wird, eliminiere jetzt unmögliche Werte für andere Variablen.

→ Forward-Checking – erlaubt uns die Suche früher abzubrechen.

- Beispiel: Wenn im Färbbarkeitsbeispiel *WA* = *red* gewählt wird, dann kann man für *NT* *red* ausschließen.

# Forward-Checking: Beispiel

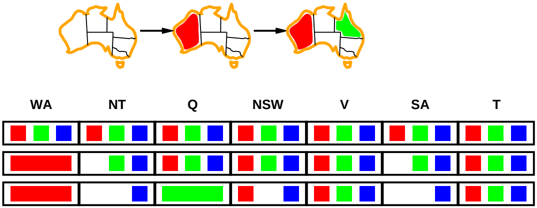
- Nach Zuweisung eines neuen Wertes an Variable *X* eliminiere in allen über Constraints verbundene Variablen jetzt nicht mehr möglichen Werte.
- Leite Backtracking ein, wenn für eine Variable kein Wert mehr möglich ist.




- Für *SA* ist jetzt kein Wert mehr möglich! Bereits jetzt kann Backtracking eingeleitet werden.

# Forward-Checking: Übersehene Probleme

- Forward-Checking übersieht manchmal Probleme, da nur Information von belegten Variablen zu unbelegten Variablen fließt:




- Da *SA* und *NSW* benachbart sind, ist *blue* für *NSW* nicht mehr möglich.
- Schlimmer: Da *SA* und *NT* benachbart sind, kann auch für *NT* der Wert *blue* ausgeschlossen werden.
- Generell: Immer wenn irgendwo ein Wert eliminiert wird, sollte man bei den über Constraints „verbundenen“ Variablen Werte eliminieren.

# Constraint-Propagierung beim Sudoku



- Wir merken uns bei jedem Feld, welche Ziffern noch möglich sind.
- Wird eine Ziffer eliminiert, überprüfen wir:
  - Hat das Feld jetzt nur noch eine einzige Möglichkeit, dann kann die Möglichkeit bei allen Peers eliminiert werden.
  - Ist in einer Gruppe eine bestimmte Ziffer nur noch in einem Feld möglich, so können wir die Ziffer hier platzieren (und alle anderen Möglichkeiten eliminieren).
- Jede Eliminierung stößt diesen Prozess wieder an.
- Man kann noch weitere Regeln aufstellen (speziell mit 2 und mehr Feldern/Werten) …

# Verwalten der möglichen Werte: Einlesen

- Wir benutzen Strings von Ziffern um die Mengen der möglichen Werte zu repräsentieren.
- Eigentlich wäre ja der Datentyp Set angemessener.
- Aber das würde bedeuten, dass wir statt der copy-Methode die copy.deepcopy()-Funktion benutzen müssten, die sehr viel ineffizienter ist.
- Und mit Strings haben wir auch alle Mengen-Operationen, die wir benötigen.

## sudokucp.py (1)

```
def parse_grid(grid):
    values = {(s, digits) for s in squares}
    for s,d in (zip(squares, [c for c in grid
                                if c in digits0p])):
        if d in digits and not assign(values, s, d):
            return False
    return values
```

# Verwalten der möglichen Werte: Ausgabe

- Um auch nicht fertig gelöste Sudokus ausgegeben zu können, soll die `display`-Funktion so erweitert werden, dass sie alle Werte für die Felder ausgeben kann.

sudokucp.py (2)

```
def display(values):
    "Display values as a 2-D grid."
    if not values:
        print("Empty grid")
        return
    width = 1+max(len(values[s]) for s in squares)
    line = '+'.join(['-'*(width*3)]*3)
    for r in rows:
        print(''.join(values[r+c].center(width) +
                      ('|' if c in '36' else '')
                      for c in cols))
        if r in 'CF': print(line)
    print()
```

# Verwalten der möglichen Werte: Zuweisung

- `assign` eliminiert jetzt alle Werte außer dem zugewiesenen.
- Treten bei der Eliminierung Fehler auf, dann ist die Zuweisung nicht möglich

## sudokucp.py (3)

```
def assign(values, s, d):
    "Try to assign value d to square s"
    others = values[s].replace(d, '')
    if all(eliminate(values, s, e) for e in others):
        return values
    return False
```

# Verwalten der möglichen Werte: Eliminierung

- Nach der Eliminierung muss getestet werden, ob Lösung noch möglich.
- Dann werden die zwei Propagierungsregeln angewendet.

## sudokucp.py (4)

```
def eliminate(values, s, d):
    if d not in values[s]:
        return values # already eliminated
    values[s] = values[s].replace(d, '')
    if not values[s]: # no more values left for s
        return False
    # check if value[s] has only one value left
    if not propagate_single_value(values, s):
        return False
    # check if unit has only a single square for value d
    if not propagate_single_square(values, s, d):
        return False
    return values
```

# Verwalten der möglichen Werte: Propagierung

- Die beiden Propagierungsregeln:

sudokucp.py (5)

```
def propagate_single_value(values, s):
    if len(values[s]) == 1:
        return all(eliminate(values, s2, values[s])
                   for s2 in peers[s])
    return True

def propagate_single_square(values, s, d):
    for u in units[s]:
        dplaces = [s for s in u if d in values[s]]
        if len(dplaces) == 0:
            return False # contradiction!
        elif len(dplaces) == 1:
            if not assign(values, dplaces[0], d):
                return False
    return True
```

# Verwalten der möglichen Werte: Suche

- Geänderte Erfolgsbedingung (alle Var. haben genau einen Wert)
- Geänderte Variablenauswahl (kleinster Wertebereich)
- Geänderte Werteselektion (nur mögliche Werte)

## sudokucp.py (6)

```
def search(values):
  "Search for solution"
  if not values: return False # failed earlier
  if all(len(values[s]) == 1 for s in squares):
      return values
  _,s = min((len(values[s]), s) for s in squares
                                   if len(values[s]) > 1)
  return some(search(assign(values.copy(), s, d))
              for d in values[s])
```

# Testen der Propagierung (1)

## Python-Interpreter

```
>>> display(parse_grid(grid1))

4 8 3 |9 2 1 |6 5 7
9 6 7 |3 4 5 |8 2 1
2 5 1 |8 7 6 |4 9 3
------+------+------
5 4 8 |1 3 2 |9 7 6
7 2 9 |5 6 4 |1 3 8
1 3 6 |7 9 8 |2 4 5
------+------+------
3 7 2 |6 8 9 |5 1 4
8 1 4 |2 5 3 |7 6 9
6 9 5 |4 1 7 |3 8 2
```

Das Sudoku wurde bereits beim Einlesen gelöst! Tatsächlich ist das bei allen einfachen Sudokus so.

# Testen der Propagierung (2)

## Python-Interpreter

```
>>> display(parse_grid(grid2))

   4      1679   12679  |  139     2369    269    |   8      1239     5
 26789     3    1256789 | 14589   24569   245689  | 12679    1249   124679
  2689   15689   125689 |   7     234569  245689  | 12369   12349   123469
------------------------+-------------------------+------------------------
  3789     2     15789  |  3459   34579    4579   | 13579     6     13789
  3679   15679   15679  |  359      8     25679   |   4     12359   12379
 36789     4     56789  |  359      1     25679   | 23579   23589   23789
------------------------+-------------------------+------------------------
  289     89      289   |   6      459      3     |  1259     7     12489
   5      6789     3    |   2      479      1     |   69     489     4689
   1      6789     4    |  589     579     5789   | 23569   23589   23689
```

Hier gibt es offensichtlich noch viele offene Möglichkeiten!

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-Propagierung

Ausblick

# Sudoku – Backtracking & Propagierung: Performanz

## Python-Interpreter

```
>>> timed_search(grid1)
0.008320000000000001
>>> timed_search(grid2)
0.013170000000000001
>>> timed_search(hard1)
0.009936999999999988
>>> timed_search(hard2)
0.013539999999999996
>>> timed_search(hard3)
118.054612
```

- Praktisch alle Sudokus können so in weniger als einer Sekunde gelöst werden.
- `hard3` ist eine Ausnahme – allerdings auch kein eindeutig lösbares Sudoku.

# 5 Ausblick

# Ausblick

- Backtracking zusammen mit Constraint-Propagierung ist eine extrem mächtige Technik, um schwierige kombinatorische Probleme zu lösen.
- Wird auch in anderen Kontexten (z.B. SAT-Solving mit Millionen von Variablen) erfolgreich eingesetzt.
- Es gibt aber immer wieder Probleminstanzen, die sich als extrem schwierig heraus stellen.
- Ab einer gewissen Größe (verallgemeinertes Sudoku!) wird es wirklich schwierig, wenn die Probleminstanzen nicht einfach durch Constraint-Propagierung lösbar sind.
- Es handelt sich hier um die so genannten NP-vollständigen Probleme.
- Und es gibt viel aktive Forschung in der Informatik, diesen Problemen zu Leibe zu rücken.