Informatik I: Einführung in die Programmierung

7. Automaten: Akzeptoren & Transduktoren

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Bernhard Nebel

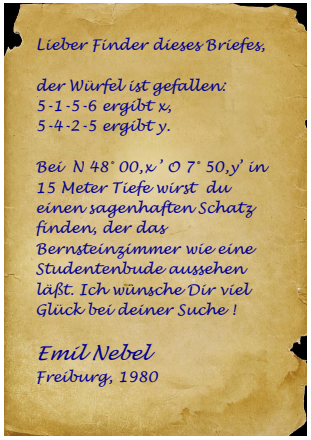
3. November 2017

1 Endliche deterministische Automaten

- Motivierendes Beispiel
- Formale Grundlagen
- Verhalten eines DEAs
- Teilstring-Erkennung

Vorweg ...

Vor kurzem war ich auf unserem Dachboden und fand einen Würfel und einen Brief.



Was steckt in dem Würfel?

- In dem Würfel gibt es ein Mechanismus, der die Abfolge von nach oben gerichteten Würfelseiten erkennt.
- Nachdem die richtige Folge „gewürfelt“ wurde, schlägt dann von innen ein kleines Männchen (oder ein Modellbauservo) mit einem Hämmerchen die Koordinaten.
- Uns interessiert hier, wie man solche Folgen von Ereignissen erkennen kann.
- Dazu kann man endliche Automaten als Akzeptoren einsetzen.
- Der endliche Automat ist ein Konzept, das überall in der Informatik vorkommt.
- Endliche Automaten sind ein sehr eingeschränktes Berechnungsmodell, das aber oft adäquat ist und einfach einzusetzen ist.

Alphabete, Wörter und Sprachen

- Ein Alphabet ist eine endliche, nicht-leere Menge (von Symbolen oder Zeichen), meist mit Σ bezeichnet.
- In unserem Fall besteht das Eingabealphabet aus den Würfelseiten, d.h. $\Sigma = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- Ein Wort über einem Alphabet Σ ist eine Folge von Zeichen aus Σ, z.B. wäre 5156 ein Wort.
- Eine (formale) Sprache ist eine beliebige (endliche oder unendliche) Menge von Wörtern.
- Endliche Automaten kann man nutzen, um Sprachen zu akzeptieren.

Endliche Automaten: Akzeptoren

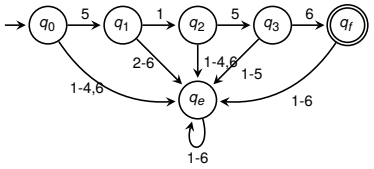
Ein deterministischer endlicher Automat (DEA) ist ein Quintupel $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, wobei

- Q ist die endliche Zustandsmenge,
- Σ ist das Eingabealphabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ ist die Übergangsfunktion,
- q_0 ist der Anfangszustand,
- $F \subseteq Q$ ist die Menge der (akzeptierenden) Endzustände.

Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion wird entweder durch eine Übergangstabelle oder durch ein Übergangsdiagramm angegeben.
In unserem Fall (zu erkennendes Wort: 5156) könnte das wie folgt aussehen (q_e bezeichnet einen Fehlerzustand und $F = \{q_f\}$).

	1	2	3	4	5	6
q_0	q_e	q_e	q_e	q_e	q_1	q_e
q_1	q_2	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e
q_2	q_e	q_e	q_e	q_e	q_3	q_e
q_3	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e	q_f
q_f	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e
q_e	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e	q_e



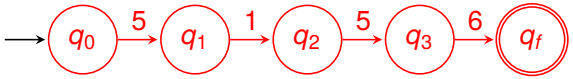
Beachte: In Übergangsdiagrammen wird der absorbierende Fehlerzustand q_e und alle Übergänge dorthin in der Regel nicht angegeben.

Verhalten eines endlichen Automaten

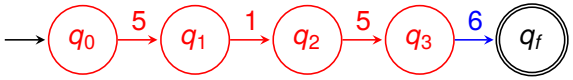
- Anfänglich befindet sich der Automat im Startzustand q_0.
- Der Automat erhält ein Wort $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ über Σ als Eingabe (darf auch leer sein, d.h. $n = 0$).
- Der Automat liest (beginnend bei a_1) jeweils ein Eingabezeichen a_i und basierend auf dem aktuellen Zustand q wechselt er in den Nachfolgezustand $q' = \delta(q, a_i)$.
- Das macht der Automat, so lange Eingabezeichen gelesen werden können.
- Ist am Ende der Automat in einem der Endzustände F, dann wird das Eingabewort w als akzeptiert angesehen.
- Ansonsten ist das Wort nicht akzeptiert.
- Die Menge aller von A akzeptierten Worte ist die von A akzeptierte (oder erkannte) Sprache oder einfach die Sprache von A , symbolisch $\mathscr{L}(A)$.

Beispiele

Eingabe: 5156 5156 156 156 56 56 6 6
Eingabe akzeptiert

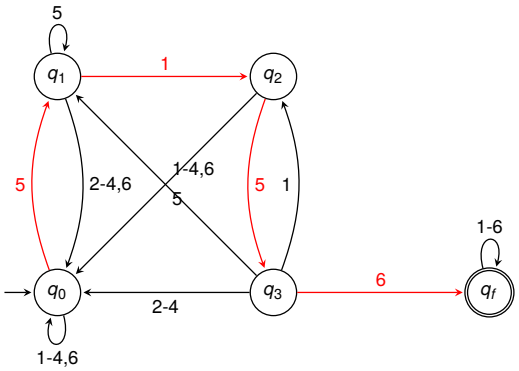


Eingabe: 515156 515156 15156 15156 5156 5156 156 156 156
Kein Übergang von q_3 aus möglich! Eingabe nicht akzeptiert.



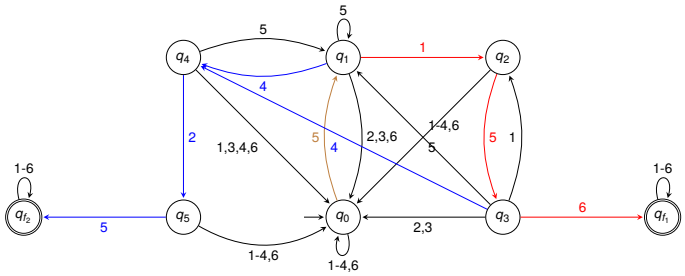
Teilstring-Erkennung

Das letzte Beispiel zeigte: Bei unserem Würfel wollen wir eigentlich alle Folgen akzeptieren, die 5156 als Teilstring enthalten, z.B. auch 55156, oder 5155156, oder 515156 oder . . . 5156. . .



Nord- und Ostkode integrieren

Wir haben ja auch noch 5425 als Teilstring zu erkennen! Das können wir in den Automaten integrieren:



2 Transduktoren

- Moore-Automat
- Umsetzung
- Python-Skript für Beispiel

Nach der Akzeptanz ist vor der Akzeptanz!

- Wir haben jetzt einen Automaten, der alle Wörter akzeptiert, die 5156 oder 5425 als Teilstring enthalten.
- Eigentlich wollen wir ja aber eine Maschine haben, die „ewig“ läuft und die jeweils nach einem akzeptierten Teilwort eine Ausgabe macht.
- Wir wollen keinen Akzeptor, sondern einen Transduktor – einen Automaten, der auch Ausgaben macht und nie stoppt.
- Hier verzichtet man zumeist auf Endzustände.
- Mit solchen Transduktoren kann man gut das Verhalten eingebetteter Systeme beschreiben.

Moore-Automaten

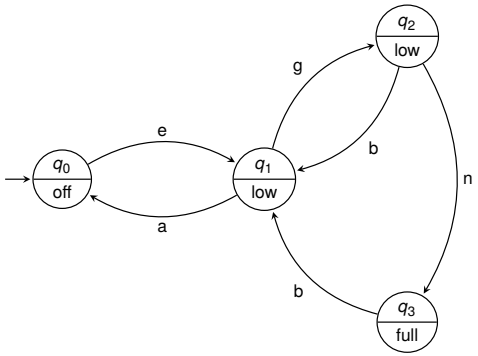
Ein Moore-Automat (nach Edward F. Moore) ist ein endlicher Automat, der in jedem Zustand ein Zeichen ausgeben kann. Es ist ein 6-Tupel $A = \langle Q, \Sigma, \Lambda, \delta, \lambda, q_0 \rangle$, wobei

- Q ist die endliche Zustandsmenge,
- Σ ist das Eingabealphabet,
- Λ ist das Ausgabealphabet,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ ist die Übergangsfunktion,
- $\lambda : Q \to \Lambda$ ist die Ausgabefunktion.
- q_0 ist der Startzustand.

Kommt der Automat in einen Zustand q, dann gibt er das Zeichen $\lambda(q)$ aus. Oft werden diese Ausgabezeichen als Aktionen verstanden (oder sind Eingaben für andere Automaten).

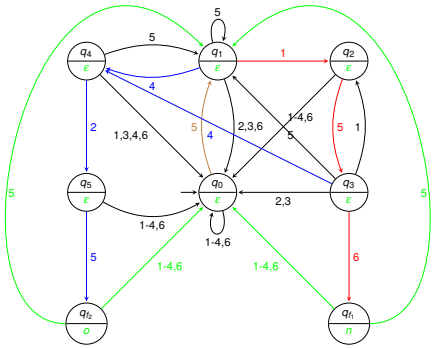
Beispiel: Ein hypothetische Motorsteuerung

$\Sigma = \{e, a, g, b, n\}$, wobei e für „ein“, a für „aus“, g für „Gas geben“, b für „bremsen“, n für „nicht drehende Räder“ steht.
$\Lambda = \{\text{off}, \text{low}, \text{full}\}$.



Beispiel: Der Würfel-Moore-Automat

Sei $\Lambda = \{n, o, \varepsilon\}$, dann könnte unser Würfelautomat so ausschauen (die grünen Teile sind neu):



Die Innereien des Würfels

- Wie implementiert man denn solch einen abstrakten Automaten?
- Schauen wir doch einmal in den Würfel hinein:

  - Batterien (4×AA-Akkus, also 4,5-6 Volt),
  - Servomotor,
  - pyboard (mit einem ARM-5 Prozessor, Beschleuningungsmesser, usw.), auf dem Micropython läuft
- Schauen wir uns das Programm mal an ...

Das Würfel-Programm

- `side_up()`: Bestimmt mit Hilfe des Beschleunigsmessers, welche Seite oben liegt. Bei unklaren Werten wartet die Funktion, bis eine stabile Lage eingetreten ist.
- `new_input()`: Erzeugt ein neues Eingabesymbol für den Automaten (Zahl zwischen 1 und 6), wenn der Würfel 500 Millisekunden stabil lag.
- `next_state(state, input)`: Das ist die Übergangsfunktion, die den nächsten Zustand berechnet.
- `output_symbol(state)`: Berechnet das zum Zustand gehörige Ausgabesymbol.
- `automaton()`: Enthält die Endlosschleife zur Ausführung des Automaten.
- `code_knock(code)`: Klopft entsprechend dem angeforderten Code.

Der Seitenerkenner mittels Beschleunigungssensor

Die Erdbeschleunigung von 1g entspricht einem Messwert von rund 20.

Seitenerkenner

```
thres = 12
def side_up():
    while True:
        x = acc.x(); y = acc.y(); z = acc.z()
        if x > thres: return 5 #x up
        if x < -thres: return 2 #x down
        if y > thres: return 6 #y up
        if y < -thres: return 1 #y down
        if z > thres: return 3 #z up
        if z < -thres: return 4 #z down
        # no stable situation yet
```


Symbolerzeugung

Symbolerzeugung

```
def new_input():
    while True:
        curr = side_up()
        new = curr
        start = pyb.millis()
        while (curr == new and
               pyb.elapsed_millis(start) <= 500):
            new = side_up()
        if curr == new:
            return curr
```

Erzeugt i.W. alle 0,5 Sekunden ein neues Eingabesymbol, also nicht nur, wenn die Seite gewechselt wird. D.h. Automat muss auch etwas anders aussehen!

Die Übergangsfunktion

Übergangsfunktion

```
def next_state(state, input):
    if state == 0: # intial state
        if input == 5: return 1
        return 0
    elif state == 1: # '5' read
        if input == 5: return 1
        if input == 1: return 2
        if input == 4: return 4
        return 0
    elif state == 2: # '51' read
        if input == 1: return 2 # repetition!
        if input == 5: return 3
        return 0
    elif ...
```

Beachte: Jeder Zustand hat eine Schleife für das Zeichen, das dafür notwendig war, in den Zustand zu kommen.

Der Automat & die Ausgabefunktion

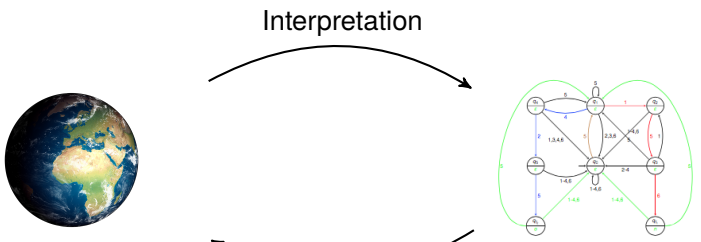
Der Automat & die Ausgabefunktion

```
def automaton():
    state = 0
    while True:
        if sw(): return # if switch is pressed, exit
        state = next_state(state, new_input())
        code_knock(output_symbol(state))

def output_symbol(state):
    if state == 10:
        return "north"
    elif state == 11:
        return "east"
    else:
        return None
```


3 Welt & Modell

Die reale Welt & formale Modelle



Bevor wir formale Modelle (wie Moore-Automaten) einsetzen können, müssen zuerst die Messwerte/Eingaben interpretiert und in Symbole umgesetzt werden. Die Interpretation und das Modell beeinflussen sich dabei gegenseitig (Beispiel: Würfelseitenerkennung und Automat)
Werden wir in der Info I aber nicht vertiefen.

4 Zusammenfassung & Ausblick

Zusammenfassung

- Endliche Automaten sind ein einfaches Berechnungsmodell.
- Formale Sprachen sind eine Menge von Wörtern.
- Determinstische endliche Automaten (DEAs) sind Akzeptoren, sie können Sprachen akzeptieren.
- Transduktoren sind endliche Automaten (ohne Endzustand), mit denen Eingaben in Ausgaben überführt werden können.
- Der Moore-Automat macht in jedem Zustand eine Ausgabe.
- Endliche Automaten können das Verhalten eingebetteter Systeme gut beschreiben.
- Was wir völlig ignoriert haben: Energieeffizienz (das pyboard braucht 80mA im Wachmodus).