

# Informatik I: Einführung in die Programmierung

## 28. Constraint Satisfaction, Backtracking und Constraint Propagierung

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



Bernhard Nebel  
07.02.2017

# 1 Motivation



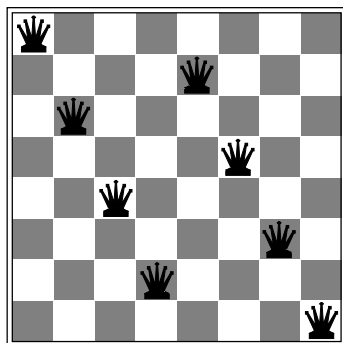
- Motivation
- Constraint-Satisfaction-Probleme
- Backtracking-Suche
- Constraint-Propagierung
- Ausblick

07.02.2017

B. Nebel – Info I

3 / 61

# Schwierige Probleme (1)



Platziere die 8 Damen so, dass sie sich nicht schlagen können

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|   |   |   | 9 |   |   | 7 | 2 | 8 |
| 2 | 7 | 8 |   |   | 3 |   | 1 |   |
|   | 9 |   |   |   |   | 6 | 4 |   |
|   | 5 |   |   | 6 |   | 2 |   |   |
|   |   | 6 |   |   |   | 3 |   |   |
|   | 1 |   |   | 5 |   |   |   |   |
| 1 |   |   | 7 |   | 6 |   | 3 | 4 |
|   |   |   | 5 | 4 |   |   |   |   |
| 7 | 9 | 1 |   |   | 8 |   | 5 |   |

Fülle die leeren Felder entsprechend der Sudoku-Regeln

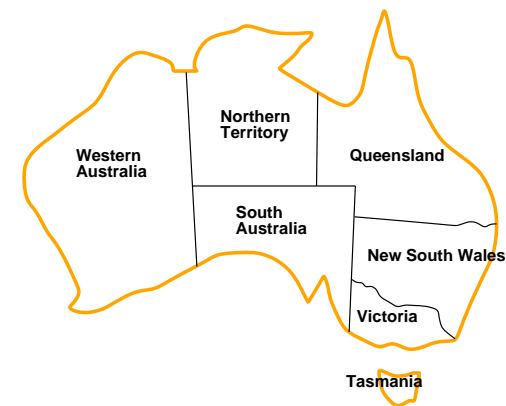
- Motivation
- Constraint-Satisfaction-Probleme
- Backtracking-Suche
- Constraint-Propagierung
- Ausblick

07.02.2017

B. Nebel – Info I

4 / 61

# Schwierige Probleme (2)



Färbe die australischen Bundesstaaten so mit drei Farben ein, dass zwei aneinander stoßende Staaten nicht die gleiche Farbe haben.

- Motivation
- Constraint-Satisfaction-Probleme
- Backtracking-Suche
- Constraint-Propagierung
- Ausblick

07.02.2017

B. Nebel – Info I

5 / 61

## Wo liegt der Fehler auf der letzten Folie?



Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
Backtracking-Suche  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

Sicht auf die ANU (Australian National University) und den Telstra-Turm in der Hauptstadt Canberra. Canberra liegt innerhalb des *Australian Capital Territory* (ACT), das wiederum innerhalb von NSW liegt.

## 2 Constraint-Satisfaction-Probleme

- 3-Färbbarkeit
- 8-Damen-Problemen
- Sudoku (1)

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
3-Färbbarkeit  
8-Damen-Problemen  
Sudoku (1)  
Backtracking-Suche  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Was haben 8 Damen, Sudokus, und das Färben einer Landkarte gemeinsam?

- Es handelt sich um **kombinatorische Probleme**, auch **Constraint-Satisfaction-Probleme** (CSP) genannt:
  - Es existieren  $n$  Variablen  $X_i$ , die Werte aus einem Bereich  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$  annehmen können.
  - Es gibt Bedingungen (**Constraints**) für die Belegung der Variablen, die erfüllt sein müssen, z.B.  $X_i \neq X_{2i}$  für alle  $i$ .
  - Eine **Lösung eines CSP** ist eine Belegung der Variablen mit Werten, so dass alle Constraints erfüllt sind.
- Diese Probleme zeichnen sich dadurch aus, dass der Raum der möglichen Lösungen (der **Suchraum**) oft astronomisch groß ist, und deshalb nicht vollständig abgesucht werden kann.
- Beispiel Sudoku: Meist müssen  $81 - 17 = 64$  Felder mit den Ziffern 1 bis 9 belegt werden. Das sind  $9^{64} \approx 10^{61}$  Möglichkeiten.

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
3-Färbbarkeit  
8-Damen-Problemen  
Sudoku (1)  
Backtracking-Suche  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Australien einfärben

- Wir haben 7 **CSP-Variablen**:  $WA, NT, SA, Q, NSW, V, T$ .
- Diese können die **Werte** *red, blue, green* annehmen.
- Die **Constraints** sind:  $WA \neq NT, WA \neq SA, NT \neq SA, NT \neq Q, SA \neq Q, SA \neq NSW, SA \neq V, Q \neq NSW, NSW \neq V$ .
- Eine mögliche **Lösung** wäre:  
 $WA = red, NT = green, SA = blue, Q = red, NSW = green, V = red, T = green$ .



Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
3-Färbbarkeit  
8-Damen-Problemen  
Sudoku (1)  
Backtracking-Suche  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

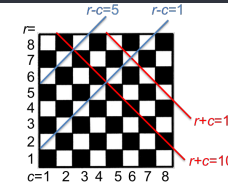
## 8 Damen platzieren (1)



- 16 **CSP-Variablen**:  $R_i, C_i$  (row, column) für die Damen  $i = 1, \dots, 8$
- 8 verschiedene **Werte**:  $k = 1, \dots, 8$  (für die jeweilige Reihe oder Spalte)
- **Constraints**:
  - 1  $R_i \neq R_j$  für alle  $i \neq j$  (die Damen sollen in unterschiedlichen Reihen stehen)
  - 2  $C_i \neq C_j$  für alle  $i \neq j$  (die Damen sollen in unterschiedlichen Spalten stehen)
  - 3 die Damen sollen nicht auf einer **gemeinsamen Diagonalen** stehen

Motivation  
 Constraint-Satisfaction-Probleme  
 3-Färbbarkeit  
 8-Damen-Problemen  
 Sudoku (1)  
 Backtracking-Suche  
 Constraint-Propagierung  
 Ausblick

## 8 Damen platzieren (2): Diagonalen-Constraints



- Auf dem Schachbrett kann man die Diagonalen durch Summen bzw. Differenzen der Reihen- und Spalten-Indizes charakterisieren.
- Die Diagonalen von links oben nach rechts unten haben konstante Summen, die alle verschieden sind.
- D.h.  $R_i + C_i \neq R_j + C_j$  für alle Damen  $i, j$  mit  $i \neq j$  beschreibt die gewünschten Constraints.
- Die Diagonalen von links unten nach rechts oben haben konstante Differenzen, die ebenfalls alle verschieden sind.
- D.h.  $R_i - C_i \neq R_j - C_j$  für  $i \neq j$  sind die Constraints.

Motivation  
 Constraint-Satisfaction-Probleme  
 3-Färbbarkeit  
 8-Damen-Problemen  
 Sudoku (1)  
 Backtracking-Suche  
 Constraint-Propagierung  
 Ausblick

## Damen platzieren (3): Suchraum-Reduktion



- Es dauert rund  $10^{-6}$  Sekunden, um eine Stellung zu testen.
- Wir können die erste Dame auf 64 verschiedene Felder stellen, die zweite auf 63, ...
- Wir haben  $64! / (64 - 8)! \approx 1.8 \cdot 10^{14}$  Möglichkeiten. D.h. wir brauchen rund  $1.8 \cdot 10^8$  Sekunden  $\approx 7$  Jahre Rechenzeit, um alle Stellungen zu testen.
- Da die Damen aber nicht unterscheidbar sind, und in jeder Reihe genau eine Dame stehen muss, können wir die Reihenvariablen mit  $R_i = i$  vorbelegen.
- Damit ergeben sich dann nur noch  $8^8 \approx 1.7 \cdot 10^7$  Möglichkeiten, entsprechend 17 Sekunden Rechenzeit.

Motivation  
 Constraint-Satisfaction-Probleme  
 3-Färbbarkeit  
 8-Damen-Problemen  
 Sudoku (1)  
 Backtracking-Suche  
 Constraint-Propagierung  
 Ausblick

## Sudoku



- Ein **Sudoku-Feld** besteht aus 81 Zellen, in denen jeweils die Ziffern 1 bis 9 eingetragen werden sollen.
- Diese werden gerne wie folgt durchnummeriert:

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | A7 | A8 | A9 |
| B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | B7 | B8 | B9 |
| C1 | C2 | C3 | C4 | C5 | C6 | C7 | C8 | C9 |
| D1 | D2 | D3 | D4 | D5 | D6 | D7 | D8 | D9 |
| E1 | E2 | E3 | E4 | E5 | E6 | E7 | E8 | E9 |
| F1 | F2 | F3 | F4 | F5 | F6 | F7 | F8 | F9 |
| G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 | G7 | G8 | G9 |
| H1 | H2 | H3 | H4 | H5 | H6 | H7 | H8 | H9 |
| I1 | I2 | I3 | I4 | I5 | I6 | I7 | I8 | I9 |

- Jeweils neun Zellen einer **Zeile**, einer **Spalte** oder eines **Blocks** bilden eine **Gruppe**.
- In jeder Gruppe müssen die Ziffern 1 bis 9 genau einmal vorkommen.
- Für eine gegebene Zelle heißen alle Zellen, die in einer Gruppe mit dieser Zelle vorkommen, **Peers dieser Zelle**.
- Die Peers einer Zelle müssen alle einen anderen Wert als die Zelle haben!

Motivation  
 Constraint-Satisfaction-Probleme  
 3-Färbbarkeit  
 8-Damen-Problemen  
 Sudoku (1)  
 Backtracking-Suche  
 Constraint-Propagierung  
 Ausblick

## Sudoku (2): CSP-Formulierung



UNI  
FREIBURG

- Wir haben 81 **CSP-Variablen**: A1 ... I8,
- Diese können die **Werte** 1, 2, ... 9 annehmen.
- Die **Constraints** sind: Jede Zelle muss einen Wert besitzen, der verschieden ist von den Werten ihrer Peers.

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
3-Färbbarkeit  
8-Damen-Problemen  
Sudoku (1)  
Backtracking-Suche  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Sudoku (3): Suchraum



UNI  
FREIBURG

- Der **Suchraum** hat in den meisten Fällen (17 Vorgaben) eine Größe von ca.  $10^{61}$  möglichen Kombinationen.
- Würden wir eine Milliarde ( $10^9$ ) Kombinationen pro Sekunde testen können, wäre die **benötigte Rechenzeit**  $10^{61} / (10^9 \cdot 3 \cdot 10^7) \approx 3 \cdot 10^{44}$  Jahre.
- Die **Lebensdauer** des Weltalls wird mit  $10^{11}$  Jahren angenommen (falls das Weltall geschlossen ist).
- Selbst bei einer **Beschleunigung** um den Faktor  $10^{30}$  würde die Rechnung nicht innerhalb der Lebensdauer des Weltalls abgeschlossen werden können.
- Trotzdem scheint das Lösen von Sudokus ja nicht so schwierig zu sein ...

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
3-Färbbarkeit  
8-Damen-Problemen  
Sudoku (1)  
Backtracking-Suche  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## 3 Backtracking-Suche



UNI  
FREIBURG

- Oz-Backtracking
- 8-Damen-Backtracking
- Sudoku-Backtracking

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
Backtracking-Suche  
Oz-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Abkürzungen wählen



UNI  
FREIBURG

- Bei den genannten Abschätzungen wurde ja immer davon ausgegangen, dass wir immer **alle CSP-Variablen** mit Werten belegen und dann testen, ob es eine Lösung ist.
- Dabei würden wir aber viele Kombinationen testen, die ganz **offensichtlich** keine Lösungen sind.
- Wenn z.B. beim Australienproblem **WA** und **NT** mit der gleichen Farbe belegt wurden, dann werden alle Vervollständigungen keine Lösung sein!
- Man kann an dieser Stelle **abkürzen** und z.B. für **NT** eine andere Farbe ausprobieren.
- Idee: Schrittweise Werte an CSP-Variablen zuweisen, wobei die Constraints der schon zugewiesenen CSP-Variablen immer **erfüllt** sein müssen.
- Wichtig: Dabei muss man manchmal auch Entscheidungen **rückgängig** machen, wenn wir keine Vervollständigung finden können.

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
Backtracking-Suche  
Oz-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Rekursive Suche mit Rücksetzen

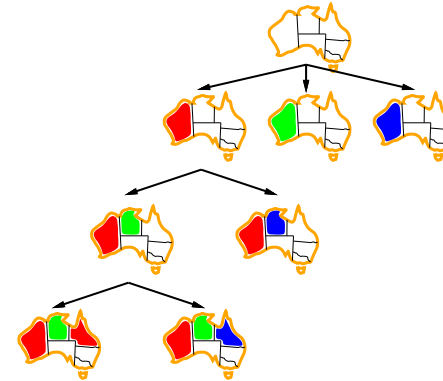
- 1 **Wähle** eine noch unbelegte CSP-Variable aus.
- 2 Weise der CSP-Variablen einen **Wert** zu, der alle Constraints mit schon belegten CSP-Variablen erfüllt.
- 3 Versuche **rekursiv** eine Belegung für die restlichen CSP-Variablen zu finden.
- 4 Gelingt dies, sind wir **fertig** und geben die Belegung zurück.
- 5 Nimm ansonsten die Belegung der CSP-Variablen zurück, wähle einen bisher noch **nicht ausprobierten** Wert und belege die CSP-Variable damit. Mache mit Schritt 3 weiter.
- 6 Wurden alle Werte erfolglos probiert, gebe **False** zurück.

Man nennt diese Art der Suche auch **Backtracking**-Suche, da man im Schritt 5 einen Schritt **zurück nimmt** und etwas anderes probiert.

Statt Rücksetzen kann man beim rekursiven Aufruf in Schritt 3 natürlich eine **Kopie** der Variablenbelegung nutzen.

## Backtracking in Oz

Für unser Beispiel zum Einfärben der australischen Landkarte könnte das so aussehen:



## Backtracking in Oz – mit Python (1)

### oz.py(1)

```
varlist = ('WA', 'NT', 'SA', 'Q', 'NSW', 'V', 'T')
domain = ('red', 'green', 'blue')
neighbor = dict(WA={'NT', 'SA'}, NT= {'WA', 'SA', 'Q'},
               SA={'WA', 'NT', 'Q', 'NSW', 'V'},
               Q={'NT', 'SA', 'NSW'}, NSW={'Q', 'SA', 'V'},
               V={'SA', 'NSW'}, T={})
```

- **Variablenamen** und **Werte** als Strings innerhalb von Tupeln aufzählen.
- **Constraints** als ein dict, in dem für jeden Staat die Nachbarstaaten angegeben werden.
- **Belegungen** werden über dicts realisiert, die dynamisch wachsen.

## Backtracking in Oz – mit Python (2)

- Um ein Element aus einer Liste zu **wählen**, benutzen wir die Funktion `some`:

### oz.py(2)

```
def some(seq):
    for e in seq:
        if e: return e
    return False
```

- Funktioniert ähnlich wie `any`, gibt aber ein Element zurück, wenn ein nicht-False Element vorhanden ist.

## Backtracking in Oz – mit Python (3)



- Die Funktion `assign(vals, x, d)` führt die Zuweisung des Wertes `d` an die CSP-Variable `x` durch:

`oz.py(3)`

```
def assign(vals, x, d):
    "assign d to var x if feasible, otherwise return False"
    for y in vals:
        if x in neighbor[y] and vals[y] == d:
            return False
    vals[x] = d
    return vals
```

- `vals` ist das dict, in dem die **Belegung** aufgebaut wird.
- Erst testen, ob der Wert `d` ein **möglicher Wert** für die Variable `x` ist, indem die **Constraints** für bereits belegte CSP-Variablen überprüft werden.
- Falls nicht, `False` zurück geben.
- Ansonsten wird `vals` **erweitert** und zurück gegeben.

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
Backtracking-Suche  
Oz-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Backtracking in Oz – mit Python (4)



`oz.py(4)`

```
def search(vals):
    "Recursively search for a satisfying assignment"
    if vals is False: return False # failed earlier
    nextvar = some(x for x in varlist if x not in vals)
    if not nextvar:
        return vals # we have found a complete assignment
    else:
        return some(search(assign(vals.copy(), nextvar, d))
                    for d in domain)
```

- `vals` kann `False` werden, wenn **assign** einen Wert nicht zulässt.
- `vals` wird vor jedem Aufruf von `assign` **kopiert**!
- Dann müssen wir die Belegung **nicht** nach dem rekursiven Aufruf **rückgängig** machen.

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
Backtracking-Suche  
Oz-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Backtracking in Oz – mit Python (5)



`oztrace.py`

```
def assign(vals, x, d):
    print(" *len(vals), \"check value %s for var %s\" % (d, x)")
    for y in vals:
        if x in neighbor[y] and vals[y] == d:
            print(" *len(vals), \"not possible!\")
            return False
    print(" *len(vals), \"trying out ...\")
    vals[x] = d
    return vals
```

### Python-Interpreter

```
>>> search(dict())
check value red for var WA
trying out ...
    check value red for var NT
...
```

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
Backtracking-Suche  
Oz-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Backtracking in Oz – mit Python-Generatoren



- Erzeuge **alle Lösungen** mit einem **Generator**.
- Fehlschläge** müssen nicht zurück geben werden.
- Achtung: Der rekursive Generator muss in einer **for**-Schleife aufgerufen werden.
- Essentiell: **Kopieren** von `vals`.

`ozgen.py`

```
def search(vals):
    "Recursively search for a satisfying assignment"
    if vals is not False:
        nextvar = some(x for x in varlist if x not in vals)
        if not nextvar:
            yield vals # we have found a complete assignment
        else:
            for d in domain:
                for result in search(assign(vals.copy(),
                                           nextvar, d)): yield result
```

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
Backtracking-Suche  
Oz-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking  
Constraint-Propagierung  
Ausblick



## Bemerkungen zur Backtracking-Suche: Variablenauswahl

Wie sollte man die nächste zu belegende CSP-Variable auswählen?

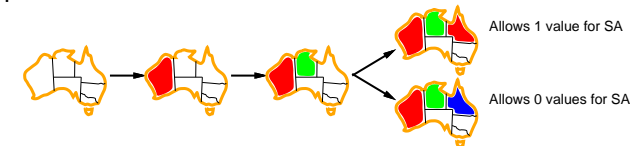
- Für die **Korrektheit** ist es egal, welche Variable man wählt.
- Es kann aber für die **Laufzeit** Unterschiede machen.
- Eine gute **Heuristik** ist es, die Variable zu wählen, die die **wenigsten noch möglichen Werte** besitzt.
- Grund: Reduktion der **Verzweigung** im Aufrufbaum weit oben.
- Beispiel:



## Bemerkungen zur Backtracking-Suche: Werteauswahl

In welcher Reihenfolge sollte man die Werte durchprobieren?

- Für die **Korrektheit** egal.
- Wenn man **schnell** eine Lösung finden will, sollte man mit den Werten beginnen, die die anderen Variablen **möglichst wenig einschränkt**.
- Erfordert allerdings, dass wir **voraus schauen** und bestimmen, welche Werte bei anderen Variablen noch möglich sind.
- Beispiel:



- Wir werden im Weiteren aber sowohl Variablen- als auch Werte-Auswahl erst einmal einfach halten.

## Backtracking für 8 Damen – mit Python (1)

- Für die **Problemrepräsentation** beim 8-Dame-Problem bietet es sich an, die Belegung durch ein Tupel `col` zu repräsentieren, bei dem der  $i$ -te Eintrag für die Spalte steht, in der die  $i$ -te Dame steht, wobei Dame  $i$  in der  $i$ -ten Reihe steht ( $i = 0, \dots, 7$ ).
- Die **Constraints** ergeben sich dann, wie weiter oben beschrieben.

### 8queens.py (1)

```
def assign(col, x, d):
    for y in range(len(col)):
        if col[y] == d: # same column?
            return False
        if (col[y] + y == d + x or # same diagonal?
            col[y] - y == d - x):
            return False
    return col + (d,) # return copy!
```

## Backtracking für 8 Damen – mit Python (2)

- Die eigentlich Suchfunktion sieht ganz **ähnlich** aus wie im Fall der 3-Färbbarkeit von Australien.
- **Kopiert** wird hier die neue Belegung bereits in `assign`, da wir mit Tupeln arbeiten.

### 8queens.py (2)

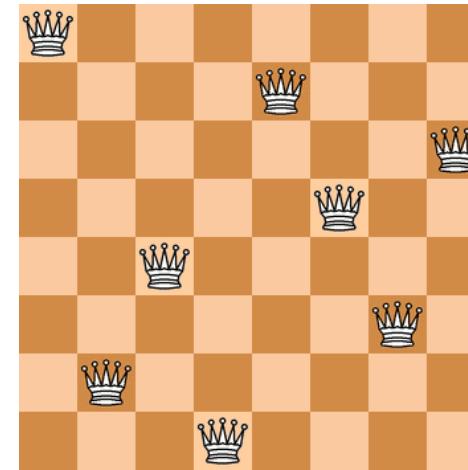
```
def search(col):
    if col is not False:
        nextvar = len(col)
        if nextvar == 8:
            return col
        else:
            for d in range(8):
                result = search(assign(col, nextvar, d))
                if result: return result
    return False
```

- Eigentlich würden wir ja gerne sehen, wie das Schachbrett dann aussieht.

## 8queens.py (3)

```
def display(col):
    for i in range(8):
        print(".*col[i], "X ", ". *(7-col[i]),
              sep="")

if __name__ == "__main__":
    display(search())
```



- Und wie sähe das aus, wenn wir Generatoren einsetzen wollten?
- Statt return, **yield**.
- **Keine Fehlschläge**, sondern nur die erfolgreichen Zweige weiter verfolgen!
- Aufrufe nur in **for-Schleifen**.
- Verschiedene Lösungen unterscheidbar machen (Leerzeile nach jeder Lösung).

Die Formalisierung der Constraints ist aufwändig:

## sudoku.py (1)

```
def cross(A, B):
    return [a+b for a in A for b in B]

digits = '123456789'
digits0p = digits + '0.'
rows = 'ABCDEFGHI'
cols = digits
squares = cross(rows, cols)
unitlist = ([cross(rows, c) for c in cols] +
            [cross(r, cols) for r in rows] +
            [cross(rs, cs) for rs in ('ABC', 'DEF', 'GHI')
             for cs in ('123', '456', '789')])

units = dict((s, [u for u in unitlist if s in u])
             for s in squares) # s -> all units of s
peers = dict((s, set(sum(units[s], [])) - set([s]))
             for s in squares) # s -> set of peers of s
```



## Sudoku-Backtracking (2): Belegung und Constraints



- Belegungen werden wie im Falle der Färbbarkeit durch ein `dict` repräsentiert.
- Die **CSP-Variablen** sind durch die Liste `squares` gegeben: `['A1', 'A2', ..., 'A9', 'B1', 'B2', ..., 'I9']`
- `unitlist` ist eine Liste, deren Elemente Listen sind, die jeweils alle Felder einer **Gruppe** enthalten: `[['A1', 'B1', ..., 'I1'], ['A2', 'B2', ..., 'I2'], ..., ['A1', 'A2', ..., 'A9'], ..., ['A1', 'A2', 'A3', 'B1', 'B2', ... 'C3'], ...]`
- `units` spezifiziert für jedes Feld, in welchen **Gruppen es Mitglied ist**:  
`{ 'A1': [['A1', ..., 'I1'], ['A1', ..., 'A9'], ['A1', ..., 'C3']], ... }`
- `peers` spezifiziert für jedes Feld die Menge der **Peers**:  
`{ 'D8': {'E9', 'E8', 'D9', 'G8', 'D2', 'D3', 'D1', 'D6', 'D7', ...}, ... }`

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
Backtracking-Suche  
0z-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Sudoku-Backtracking (3): Parsing



- Wir wollen ja **verschiedene Sudokus** lösen.
- D.h. wir müssen die Aufgabe **parsen** und in eine **interne Struktur** überführen.
- Aufgabe besteht aus 81 Zeichen 0 – 9 und '.', wobei 0 und '.' für ein leeres Feld stehen.
- Alle anderen Zeichen werden **ignoriert**. D.h. wir können die Aufgabe auch als Tabelle angeben.

### `sudoku.py (2)`

```
def parse_grid(grid):
    values = dict()
    for s,d in (zip(squares, [c for c in grid
                            if c in digits0p])):
        if d in digits and not assign(values, s, d):
            return False
    return values
```

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
Backtracking-Suche  
0z-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Sudoku-Backtracking (3): Ausgabe



- Die Lösungen sollen natürlich auch **dargestellt** werden.
- `display` gibt eine Belegung aus.

### `sudoku.py (3)`

```
def display(values):
    "Display values as a 2-D grid."
    if not values:
        print("Empty grid")
        return
    line = '+'.join(['-'*6]*3)
    for r in rows:
        print(''.join(values.get(r+c, '.') + ' ' +
                      ('|' if c in '36' else ' ')
                      for c in cols))
        if r in 'CF': print(line)
    print()
```

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
Backtracking-Suche  
0z-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Sudoku-Backtracking (4): assign



- Die Zuweisung funktioniert wieder ähnlich wie in den beiden anderen Fällen.
- D.h. es werden die **Constraints** überprüft und im **Erfolgsfall** die erweiterte Belegung zurück gegeben.
- Ansonsten wird **False** zurück gegeben.

### `sudoku.py (4)`

```
def assign(values, s, d):
    "Try to assign value d to square s"
    if s not in values and all(values[p] != d
                               for p in values
                               if p in peers[s]):
        values[s] = d
        return values
    return False
```

Motivation  
Constraint-Satisfaction-Probleme  
Backtracking-Suche  
0z-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking  
Constraint-Propagierung  
Ausblick

## Sudoku-Backtracking (5): Rekursive Suche



- Völlig analog zu den beiden vorherigen Fällen:

`sudoku.py (5)`

```
def search(values):
    "Search for solution"
    if not values: return False # failed earlier
    s = some(s for s in squares if s not in values)
    if not s: return values
    return some(search(assign(values.copy(), s, d))
                for d in digits)
```

```
import time
```

```
def timed_search(grid):
    start = time.process_time()
    search(parse_grid(grid))
    return time.process_time() - start
```

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung

Ausblick

07.02.2017

B. Nebel – Info I

40 / 61

## Sudoku-Backtracking (6): In Aktion ...



### Python-Interpreter

```
>>> grid1='''003020600 900305001 001806400 008102900
... 700000008 006708200 002609500 800203009
... 005010300'''
>>> display(search(parse_grid(grid1)))
4 8 3 |9 2 1 |6 5 7
9 6 7 |3 4 5 |8 2 1
2 5 1 |8 7 6 |4 9 3
-----+-----+-----
5 4 8 |1 3 2 |9 7 6
7 2 9 |5 6 4 |1 3 8
1 3 6 |7 9 8 |2 4 5
-----+-----+-----
3 7 2 |6 8 9 |5 1 4
8 1 4 |2 5 3 |7 6 9
6 9 5 |4 1 7 |3 8 2
```

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung

Ausblick

07.02.2017

B. Nebel – Info I

41 / 61

## Sudoku-Backtracking (6): Performanz



### Python-Interpreter

```
>>> timed_search(grid1)
0.01417400000013913
>>> timed_search(grid2)
660.315836999999999
>>> timed_search(hard1)
24.770020000000002
>>> timed_search(hard2)
0.693335000000161
>>> timed_search(hard3)
28.8988889999999826
```

- `hard1` und `hard2` sind zwei von dem finnischen Mathematiker Arto Inkala entworfene Sudokus, die er als „die schwersten“ Sudokus bezeichnet.
- `hard3` (von Peter Norvig) ist auch für Computer eine harte Nuss; aber es ist kein Sudoku, da nicht eindeutig.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung

Ausblick

07.02.2017

B. Nebel – Info I

42 / 61

## Backtracking: Fazit



- Mit Hilfe der Backtracking-Suche kann man auch sehr **große Suchräume** absuchen.
- Die Methode garantiert, dass wir eine **Lösung finden**, wenn eine existiert.
- Die tatsächlich notwendige Zeit kann **stark schwanken**.
- Können wir vielleicht weitere **Abkürzungen** bei der Suche einsetzen?

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking  
8-Damen-Backtracking  
Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung

Ausblick

07.02.2017

B. Nebel – Info I

43 / 61

# 4 Constraint-Propagierung



- Die Idee
- Sudoku-Constraint-Propagierung

- Motivation
- Constraint-Satisfaction-Probleme
- Backtracking-Suche
- Constraint-Propagierung**
- Die Idee
- Sudoku-Constraint-Propagierung
- Ausblick

# Constraint-Propagierung: Die Idee



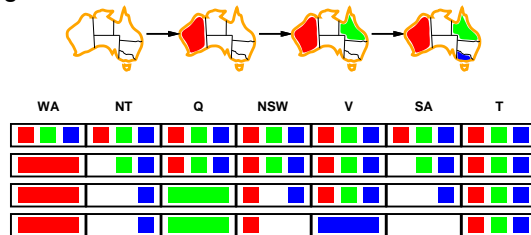
- Im Zusammenhang mit der **Auswahl** der nächsten Variable und des nächsten Wertes wurde bereits erwähnt, dass man die noch **möglichen Werte** pro Variable kennen sollte.
- Idee: Wann immer ein Wert fest gelegt wird, **eliminiere** jetzt unmögliche Werte für andere Variablen.
- **Forward-Checking** – erlaubt uns die Suche früher abzubrechen.
- Beispiel: Wenn im Färbbarkeitsbeispiel  $WA = red$  gewählt wird, dann kann man für  $NT$   $red$  ausschließen.

- Motivation
- Constraint-Satisfaction-Probleme
- Backtracking-Suche
- Constraint-Propagierung
- Die Idee**
- Sudoku-Constraint-Propagierung
- Ausblick

# Forward-Checking: Beispiel



- Nach Zuweisung eines neuen Wertes an Variable  $X$  eliminiere in allen über Constraints verbundene Variablen jetzt nicht mehr möglichen Werte.
- Leite Backtracking ein, wenn für eine Variable kein Wert mehr möglich ist.



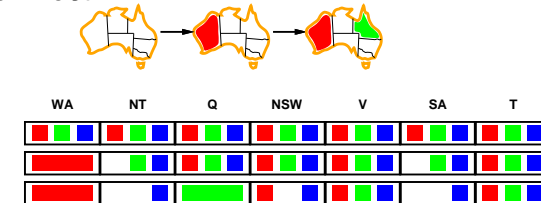
- Für  $SA$  ist jetzt kein Wert mehr möglich! Bereits jetzt kann Backtracking eingeleitet werden.

- Motivation
- Constraint-Satisfaction-Probleme
- Backtracking-Suche
- Constraint-Propagierung
- Die Idee**
- Sudoku-Constraint-Propagierung
- Ausblick

# Forward-Checking: Übersehene Probleme



- Forward-Checking übersieht manchmal Probleme, da nur Information von belegten Variablen zu unbelegten Variablen fließt:



- Da  $SA$  und  $NSW$  benachbart sind, ist  $blue$  für  $NSW$  nicht mehr möglich.
- Schlimmer: Da  $SA$  und  $NT$  benachbart sind, kann auch für  $NT$  der Wert  $blue$  ausgeschlossen werden.
- Generell: Immer wenn irgendwo ein Wert **eliminiert** wird, sollte man bei den über Constraints „verbundenen“ Variablen Werte eliminieren.

- Motivation
- Constraint-Satisfaction-Probleme
- Backtracking-Suche
- Constraint-Propagierung
- Die Idee**
- Sudoku-Constraint-Propagierung
- Ausblick

- Wir merken uns bei jedem Feld, welche Ziffern noch möglich sind.
- Wird eine Ziffer **eliminiert**, überprüfen wir:
  - Hat das Feld jetzt nur noch eine einzige Möglichkeit, dann kann die Möglichkeit bei allen **Peers** eliminiert werden.
  - Ist in **einer Gruppe** eine bestimmte Ziffer nur noch in einem Feld möglich, so können wir die Ziffer hier platzieren (und alle anderen Möglichkeiten eliminieren).
- Jede Eliminierung stößt diesen Prozess wieder an.
- Man kann noch **weitere Regeln** aufstellen (speziell mit 2 und mehr Feldern/Werten) ...

Motivation  
 Constraint-Satisfaction-Probleme  
 Backtracking-Suche  
 Constraint-Propagierung  
 Die Idee  
 Sudoku-Constraint-Propagierung  
 Ausblick

- Wir benutzen **Strings** von Ziffern um die Mengen der möglichen Werte zu repräsentieren.
- Eigentlich wäre ja der Datentyp **Set** angemessener.
- Aber das würde bedeuten, dass wir statt der **copy**-Methode die **copy.deepcopy()**-Funktion benutzen müssten, die sehr viel ineffizienter ist.
- Und mit Strings haben wir auch alle Mengen-Operationen, die wir benötigen.

Motivation  
 Constraint-Satisfaction-Probleme  
 Backtracking-Suche  
 Constraint-Propagierung  
 Die Idee  
 Sudoku-Constraint-Propagierung  
 Ausblick

## sudokucp.py (1)

```
def parse_grid(grid):
    values = {(s, digits) for s in squares}
    for s,d in (zip(squares, [c for c in grid
                           if c in digits0p])):
        if d in digits and not assign(values, s, d):
            return False
    return values
```

- Um auch **nicht fertig** gelöste Sudokus ausgegeben zu können, soll die **display**-Funktion so erweitert werden, dass sie alle Werte für die Felder ausgeben kann.

## sudokucp.py (2)

```
def display(values):
    "Display values as a 2-D grid."
    if not values:
        print("Empty grid")
        return
    width = 1+max(len(values[s]) for s in squares)
    line = '+' .join(['-'*(width*3)]*3)
    for r in rows:
        print(''.join(values[r+c].center(width) +
                      ('|' if c in '36' else ' ')
                      for c in cols))
        if r in 'CF': print(line)
    print()
```

Motivation  
 Constraint-Satisfaction-Probleme  
 Backtracking-Suche  
 Constraint-Propagierung  
 Die Idee  
 Sudoku-Constraint-Propagierung  
 Ausblick

- **assign** **eliminiert** jetzt alle Werte außer dem zugewiesenen.
- Treten bei der Eliminierung Fehler auf, dann ist die Zuweisung nicht möglich

## sudokucp.py (3)

```
def assign(values, s, d):
    "Try to assign value d to square s"
    others = values[s].replace(d, '')
    if all(eliminate(values, s, e) for e in others):
        return values
    return False
```

Motivation  
 Constraint-Satisfaction-Probleme  
 Backtracking-Suche  
 Constraint-Propagierung  
 Die Idee  
 Sudoku-Constraint-Propagierung  
 Ausblick

## Verwalten der möglichen Werte: Eliminierung



- Nach der Eliminierung muss getestet werden, ob Lösung noch **möglich**.
- Dann werden die zwei **Propagierungsregeln** angewendet.

sudokucp.py (4)

```
def eliminate(values, s, d):
    if d not in values[s]:
        return values # already eliminated
    values[s] = values[s].replace(d, '')
    if not values[s]: # no more values left for s
        return False
    # check if value[s] has only one value left
    if not propagate_single_value(values, s):
        return False
    # check if unit has only a single square for value d
    if not propagate_single_square(values, s, d):
        return False
    return values
```

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee  
Sudoku-Constraint-Propagierung

Ausblick

07.02.2017

B. Nebel – Info I

53 / 61

## Verwalten der möglichen Werte: Propagierung



- Die beiden Propagierungsregeln:

sudokucp.py (5)

```
def propagate_single_value(values, s):
    if len(values[s]) == 1:
        return all(eliminate(values, s2, values[s])
                  for s2 in peers[s])
    return True

def propagate_single_square(values, s, d):
    for u in units[s]:
        dplaces = [s for s in u if d in values[s]]
        if len(dplaces) == 0:
            return False # contradiction!
        elif len(dplaces) == 1:
            if not assign(values, dplaces[0], d):
                return False
    return True
```

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee  
Sudoku-Constraint-Propagierung

Ausblick

07.02.2017

B. Nebel – Info I

54 / 61

## Verwalten der möglichen Werte: Suche



- Geänderte **Erfolgsbedingung** (alle Var. haben genau einen Wert)
- Geänderte **Variablenauswahl** (kleinster Wertebereich)
- Geänderte **Werteselektion** (nur mögliche Werte)

sudokucp.py (6)

```
def search(values):
    "Search for solution"
    if not values: return False # failed earlier
    if all(len(values[s]) == 1 for s in squares):
        return values
    _,s = min((len(values[s]), s) for s in squares
              if len(values[s]) > 1)
    return some(search(assign(values.copy(), s, d))
                for d in values[s])
```

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee  
Sudoku-Constraint-Propagierung

Ausblick

07.02.2017

B. Nebel – Info I

55 / 61

## Testen der Propagierung (1)



Python-Interpreter

```
>>> display(parse_grid(grid1))
```

```
4 8 3 |9 2 1 |6 5 7
9 6 7 |3 4 5 |8 2 1
2 5 1 |8 7 6 |4 9 3
-----+-----+-----
5 4 8 |1 3 2 |9 7 6
7 2 9 |5 6 4 |1 3 8
1 3 6 |7 9 8 |2 4 5
-----+-----+-----
3 7 2 |6 8 9 |5 1 4
8 1 4 |2 5 3 |7 6 9
6 9 5 |4 1 7 |3 8 2
```

Das Sudoku wurde bereits beim **Einlesen** gelöst! Tatsächlich ist das bei allen einfachen Sudokus so.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee  
Sudoku-Constraint-Propagierung

Ausblick

07.02.2017

B. Nebel – Info I

56 / 61

## Python-Interpreter

```
>>> display(parse_grid(grid2))
```

|       |       |         |  |       |        |        |  |       |       |        |
|-------|-------|---------|--|-------|--------|--------|--|-------|-------|--------|
| 4     | 1679  | 12679   |  | 139   | 2369   | 269    |  | 8     | 1239  | 5      |
| 26789 | 3     | 1256789 |  | 14589 | 24569  | 245689 |  | 12679 | 1249  | 124679 |
| 2689  | 15689 | 125689  |  | 7     | 234569 | 245689 |  | 12369 | 12349 | 123469 |
| ----- |       |         |  |       |        |        |  |       |       |        |
| 3789  | 2     | 15789   |  | 3459  | 34579  | 4579   |  | 13579 | 6     | 13789  |
| 3679  | 15679 | 15679   |  | 359   | 8      | 25679  |  | 4     | 12359 | 12379  |
| 36789 | 4     | 56789   |  | 359   | 1      | 25679  |  | 23579 | 23589 | 23789  |
| ----- |       |         |  |       |        |        |  |       |       |        |
| 289   | 89    | 289     |  | 6     | 459    | 3      |  | 1259  | 7     | 12489  |
| 5     | 6789  | 3       |  | 2     | 479    | 1      |  | 69    | 489   | 4689   |
| 1     | 6789  | 4       |  | 589   | 579    | 5789   |  | 23569 | 23589 | 23689  |

Hier gibt es offensichtlich noch viele **offene Möglichkeiten!**

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung  
Die Idee  
Sudoku-Constraint-Propagierung

Ausblick

## Python-Interpreter

```
>>> timed_search(grid1)
0.008320000000000001
>>> timed_search(grid2)
0.013170000000000001
>>> timed_search(hard1)
0.009936999999999988
>>> timed_search(hard2)
0.013539999999999996
>>> timed_search(hard3)
118.054612
```

- Praktisch alle Sudokus können so in weniger als einer Sekunde gelöst werden.
- **hard3** ist eine Ausnahme – allerdings auch kein eindeutig lösbares Sudoku.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung  
Die Idee  
Sudoku-Constraint-Propagierung

Ausblick

## 5 Ausblick

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Ausblick

## Ausblick

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Ausblick

- **Backtracking** zusammen mit **Constraint-Propagierung** ist eine extrem mächtige Technik, um schwierige kombinatorische Probleme zu lösen.
- Wird auch in anderen Kontexten (z.B. **SAT-Solving** mit Millionen von Variablen) erfolgreich eingesetzt.
- Es gibt aber immer wieder Probleminstanzen, die sich als **extrem schwierig** heraus stellen.
- Ab einer gewissen **Größe** (verallgemeinertes Sudoku!) wird es wirklich schwierig, wenn die Probleminstanzen nicht einfach durch Constraint-Propagierung lösbar sind.
- Es handelt sich hier um die so genannten **NP-vollständigen** Probleme.
- Und es gibt viel aktive Forschung in der Informatik, diesen Problemen zu Leibe zu rücken.