Informatik I: Einführung in die Programmierung

9. Rekursion

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

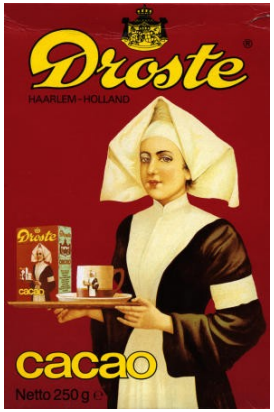
Bernhard Nebel

08. November 2016

1 Rekursion verstehen

Rekursion verstehen
Fakultäts-funktion
Fibonacci-Folge

Rekursion verstehen



Um Rekursion zu verstehen, muss man zuerst einmal Rekursion verstehen.

Abb. in Public Domain, Quelle Wikipedia

Rekursion verstehen
Fakultäts-funktion
Fibonacci-Folge

2 Fakultätsfunktion

- Rekursive Definition
- Fakultät in Python
- Einfache Rekursion und Iteration

Rekursion verstehen
Fakultäts-funktion
Rekursive Definition
Fakultät in Python
Einfache Rekursion und Iteration
Fibonacci-Folge

Rekursion als Definitionstechnik: Fakultätsfunktion

- Bei einer rekursiven Definition wird das zu Definierende unter Benutzung desselben (normalerweise in einer einfacheren Version) definiert.
- Beispiel Fakultätsfunktion
  - Auf wie viele Arten kann man n Dinge sequentiell anordnen?
  - Berechne, auf wie viele Arten man $n-1$ Dinge anordnen kann. Für jede dieser Anordnungen können wir das „letzte“ Ding auf n Arten einfügen.
  - D.h. wir können die Fakultätsfunktion $n!$ wie folgt definieren:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0; \\ n \cdot (n-1)!, & \text{sonst.} \end{cases}$$

  - Berechne 4!:

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$$

Rekursion verstehen
Fakultäts-funktion
Rekursive Definition
Fakultät in Python
Einfache Rekursion und Iteration
Fibonacci-Folge

Fakultätsfunktion in Python

- Wir können in Funktionsdefinitionen bisher undefinierte (z.B. die gerade zu definierende) Funktion benutzen:

Python-Interpreter

```
>>> def fak(n):
...     if n <= 1:
...         return 1
...     else:
...         return n*fak(n-1)
...
>>> fak(4)
24
>>> fak(50)
30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000
```

Rekursion verstehen
Fakultäts-funktion
Rekursive Definition
Fakultät in Python
Einfache Rekursion und Iteration
Fibonacci-Folge

Rekursive Aufrufe

- Was passiert genau?

Aufrufsequenz

→ `fak`(4) wählt else-Zweig und ruft auf:
  → `fak`(3) wählt else-Zweig und ruft auf:
    → `fak`(2) wählt else-Zweig und ruft auf:
      → `fak`(1) wählt if-Zweig und:
      ← `fak`(1) gibt 1 zurück
    ← `fak`(2) gibt $(2 \times 1) = 2$ zurück
  ← `fak`(3) gibt $(3 \times 2) = 6$ zurück
← `fak`(4) gibt $(4 \times 6) = 24$ zurück

Visualisierung

Rekursion verstehen
Fakultäts-funktion
Rekursive Definition
Fakultät in Python
Einfache Rekursion und Iteration
Fibonacci-Folge

Einfache Rekursion und Iteration

- Die rekursive Definition der Fakultätsfunktion ist eine einfache Rekursion.
- Solche Rekursionen können einfach in Iterationen (`while`-Schleife) umgewandelt werden:

Python-Interpreter

```
>>> def ifak(n):
...     result = 1
...     while n >= 1:
...         result = result * n
...         n -= 1
...     return result
...
```

Visualisierung

Rekursion verstehen
Fakultäts-funktion
Rekursive Definition
Fakultät in Python
Einfache Rekursion und Iteration
Fibonacci-Folge

3 Fibonacci-Folge

- Definition der Fibonacci-Zahlen
- Fibonacci in Python
- Fibonacci iterativ

Fibonacci-Folge: Das Kanninchenproblem

- Manchmal sind kompliziertere Formen der Rekursion notwendig, z.B. bei der Definition der Fibonacci-Folge
- Eingeführt von *Leonardo da Pisa*, genannt *Fibonacci*, in seinem Buch *Liber abbaci* (1202), das u.a. die arabischen Ziffern und den Bruchstrich in die westliche Welt einführten.
- Anzahl der Kannichen-Paare, die man erhält, wenn jedes Paar ab dem zweiten Monat ein weiteres Kannichen-Paar erzeugt (und kein Kannichen stirbt). Wir beginnen im Monat 0, in dem das erste Paar geboren wird:

Monat	vorhanden	geboren	gesamt
0.	0	1	1
1.	1	0	1
2.	1	1	2
3.	2	1	3
4.	3	2	5

Fibonacci-Zahlen

- Die Fibonacci-Zahlen werden normalerweise wie folgt definiert (und beschreiben damit die vorhandenen Kanninchen-Paare am Anfang des Monats):

$$\texttt{fib}(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0; \\ 1, & \text{falls } n = 1; \\ \texttt{fib}(n-1) + \texttt{fib}(n-2), & \text{sonst.} \end{cases}$$

- D.h. die Folge beginnt mit 0 und nicht mit 1.
- Beachte: Hier gibt es zwei rekursive Verwendungen der Definition.
- Die Fibonacci-Zahlen spielen in vielen anderen Kontexten eine wichtige Rolle (z.B. Goldener Schnitt).

Fibonacci-Zahlen in Python

- Umsetzung in Python folgt direkt der mathematischen Definition:

Python-Interpreter

```
>>> def fib(n):
...     if n <= 1:
...         return n
...     else:
...         return fib(n-1) + fib(n-2)
...
>>> fib(35)
9227465
```

Rekursive Aufrufe

Aufrufsequenz

→ `fib`(3) wählt else-Zweig und ruft auf:
| → `fib`(2) wählt else-Zweig und ruft auf:
| | → `fib`(1) wählt if-Zweig und
| | ← `fib`(1) gibt 1 zurück
| `fib`(2) ruft jetzt auf:
| | → `fib`(0) wählt if-Zweig und
| | ← `fib`(0) gibt 0 zurück
| ← `fib`(2) gibt 1 zurück
`fib`(3) ruft jetzt auf:
| → `fib`(1) wählt if-Zweig und
| ← `fib`(1) gibt 1 zurück
← `fib`(3) gibt 2 zurück

Visualisierung

Rekursion verstehen
Fakultätsfunktion
Fibonacci-Folge
Definition der Fibonacci-Zahlen
Fibonacci in Python
Fibonacci iterativ

Komplexe Rekursion: Verständnis und Laufzeit

- Es gibt komplexere Formen der Rekursion: mehrfach, *indirekt*, *durch Argumente*.
- Es ist nicht ganz einfach, den Verlauf der Ausführung der `fib`-Funktion nachzuvollziehen.
- Dies ist aber auch nicht notwendig! Es reicht aus, sich zu vergegenwärtigen, dass:
  - falls die Funktion alles richtig macht für Argumente mit dem Wert $< n$,
  - dann berechnet sie das Geforderte
  - → Prinzip der vollständigen Induktion
- Die mehrfachen rekursiven Aufrufe führen zu sehr hoher Laufzeit!
- Auch hier ist eine iterative Lösung (`while`-Schleife) möglich.

Rekursion verstehen
Fakultätsfunktion
Fibonacci-Folge
Definition der Fibonacci-Zahlen
Fibonacci in Python
Fibonacci iterativ

Iterative Lösung I

- Im Allgemeinen ist es schwierig, Mehrfachrekursion in Iteration umzuwandeln.
- Bei `fib` hilft die Beobachtung, dass man den Wert immer durch die Addition der letzten beiden Werte berechnen kann. Das geht auch bei 0 startend!
- Generiere die Werte aufsteigend, bis die Anzahl der erzeugten Werte den Parameter n erreicht.

Rekursion verstehen
Fakultätsfunktion
Fibonacci-Folge
Definition der Fibonacci-Zahlen
Fibonacci in Python
Fibonacci iterativ

Iterative Lösung II

Python-Interpreter

```
>>> def ifib(n):
...     if n <= 1:
...         return n
...     a = 0
...     b = 1
...     i = 2
...     while i < n:
...         new = a + b
...         a = b
...         b = new
...         i += 1
...     return a + b
```

Visualisierung

Rekursion verstehen
Fakultätsfunktion
Fibonacci-Folge
Definition der Fibonacci-Zahlen
Fibonacci in Python
Fibonacci iterativ

Zusammenfassung

UNI FREIBURG

Rekursion verstehen
Fakultäts-funktion
Fibonacci-Folge
Definition der Fibonacci-Zahlen
Fibonacci in Python
Fibonacci iterativ

- Rekursion ist eine bekannte Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Rekursion erlaubt es, bestimmte Funktion sehr kurz und elegant anzugeben.
- Rekursion kann als Beispiel für das Konzept der Selbstanwendung verstanden werden, das in der Informatik weit verbreitet ist.
- Dies ist nicht immer die effizienteste Form! Das ist aber abhängig von der Programmiersprache.
- Einfachrekursion kann meist einfach in Iteration umgewandelt werden.
- Mehrfachrekursion ist komplizierter.
- Es gibt noch komplexere Formen der Rekursion.
- Interessant werden rekursive Funktionen bei rekursiven Datenstrukturen.