

# Informatik I: Einführung in die Programmierung

## 9. Rekursion

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



**UNI  
FREIBURG**

Bernhard Nebel

08. November 2016

# 1 Rekursion verstehen

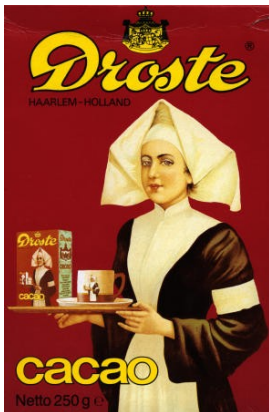


**UNI  
FREIBURG**

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Fibonacci-  
Folge



Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Fibonacci-  
Folge

Um Rekursion zu verstehen, muss man zuerst einmal  
Rekursion verstehen.

## 2 Fakultätsfunktion

- Rekursive Definition
- Fakultät in Python
- Einfache Rekursion und Iteration

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Rekursive  
Definition

Fakultät in Python

Einfache Rekursion  
und Iteration

Fibonacci-  
Folge

# Rekursion als Definitionstechnik: Fakultätsfunktion



- Bei einer **rekursiven Definition** wird das zu Definierende unter Benutzung desselben (normalerweise in einer einfacheren Version) definiert.
- Beispiel **Fakultätsfunktion**
  - Auf wie viele Arten kann man  $n$  Dinge sequentiell anordnen?
  - Berechne, auf wie viele Arten man  $n - 1$  Dinge anordnen kann. Für jede dieser Anordnungen können wir das „letzte“ Ding auf  $n$  Arten einfügen.
  - D.h. wir können die Fakultätsfunktion  $n!$  wie folgt definieren:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0; \\ n \cdot (n - 1)!, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Berechne  $4!$ :

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$$

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Rekursive  
Definition

Fakultät in Python

Einfache Rekursion  
und Iteration

Fibonacci-  
Folge



- Wir können in Funktionsdefinitionen bisher undefinierte (z.B. die gerade zu definierende) Funktion benutzen:

## Python-Interpreter

```
>>> def fak(n):
...     if n <= 1:
...         return 1
...     else:
...         return n*fak(n-1)
...
>>> fak(4)
24
>>> fak(50)
304140932017133780436126081660647688443776415689605
12000000000000
```

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Rekursive  
Definition

Fakultät in Python

Einfache Rekursion  
und Iteration

Fibonacci-  
Folge

- Was passiert genau?

## Aufrufsequenz

→ fak(4) wählt else-Zweig und ruft auf:  
    → fak(3) wählt else-Zweig und ruft auf:  
        → fak(2) wählt else-Zweig und ruft auf:  
            → fak(1) wählt if-Zweig und:  
                ← fak(1) gibt 1 zurück  
            ← fak(2) gibt  $(2 \times 1) = 2$  zurück  
        ← fak(3) gibt  $(3 \times 2) = 6$  zurück  
    ← fak(4) gibt  $(4 \times 6) = 24$  zurück

## Visualisierung

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Rekursive  
Definition

Fakultät in Python

Einfache Rekursion  
und Iteration

Fibonacci-  
Folge



- Die rekursive Definition der Fakultätsfunktion ist eine **einfache Rekursion**.
- Solche Rekursionen können einfach in **Iterationen** (`while`-Schleife) umgewandelt werden:

## Python-Interpreter

```
>>> def ifak(n):  
...     result = 1  
...     while n >= 1:  
...         result = result * n  
...         n -= 1  
...     return result  
...  
...
```

## Visualisierung

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Rekursive  
Definition

Fakultät in Python

Einfache Rekursion  
und Iteration

Fibonacci-  
Folge



# 3 Fibonacci-Folge



- Definition der Fibonacci-Zahlen
- Fibonacci in Python
- Fibonacci iterativ

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

**Fibonacci-  
Folge**

Definition der  
Fibonacci-Zahlen

Fibonacci in  
Python

Fibonacci iterativ



- Manchmal sind kompliziertere Formen der Rekursion notwendig, z.B. bei der Definition der **Fibonacci-Folge**
- Eingeführt von *Leonardo da Pisa*, genannt *Fibonacci*, in seinem Buch *Liber abbaci* (1202), das u.a. die arabischen Ziffern und den Bruchstrich in die westliche Welt einführten.
- Anzahl der Kanninchen-Paare, die man erhält, wenn jedes Paar ab dem zweiten Monat ein weiteres Kanninchen-Paar erzeugt (und kein Kanninchen stirbt). Wir beginnen im Monat 0, in dem das erste Paar geboren wird:

|    | Monat | vorhanden | geboren | gesamt |
|----|-------|-----------|---------|--------|
| 0. | 0     | 1         | 1       | 1      |
| 1. | 1     | 0         | 1       | 1      |
| 2. | 1     | 1         | 1       | 2      |
| 3. | 2     | 1         | 1       | 3      |
| 4. | 3     | 2         | 2       | 5      |

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Fibonacci-  
Folge

Definition der  
Fibonacci-Zahlen

Fibonacci in  
Python

Fibonacci iterativ

- Die Fibonacci-Zahlen werden normalerweise wie folgt definiert (und beschreiben damit die vorhandenen Kännchen-Paare am Anfang des Monats):

$$\text{fib}(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0; \\ 1, & \text{falls } n = 1; \\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2), & \text{sonst.} \end{cases}$$

- D.h. die Folge beginnt mit 0 und nicht mit 1.
- Beachte: Hier gibt es zwei rekursive Verwendungen der Definition.
- Die Fibonacci-Zahlen spielen in vielen anderen Kontexten eine wichtige Rolle (z.B. Goldener Schnitt).

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Fibonacci-  
Folge

Definition der  
Fibonacci-Zahlen

Fibonacci in  
Python

Fibonacci iterativ

- Umsetzung in Python folgt direkt der mathematischen Definition:

## Python-Interpreter

```
>>> def fib(n):  
...     if n <= 1:  
...         return n  
...     else:  
...         return fib(n-1) + fib(n-2)  
...  
>>> fib(35)  
9227465
```

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Fibonacci-  
Folge

Definition der  
Fibonacci-Zahlen

Fibonacci in  
Python

Fibonacci iterativ

## Aufrufsequenz

→ fib(3) wählt else-Zweig und ruft auf:  
|       → fib(2) wählt else-Zweig und ruft auf:  
|       |       → fib(1) wählt if-Zweig und  
|       |       ← fib(1) gibt 1 zurück  
|       fib(2) ruft jetzt auf:  
|       |       → fib(0) wählt if-Zweig und  
|       |       ← fib(0) gibt 0 zurück  
|       ← fib(2) gibt 1 zurück  
fib(3) ruft jetzt auf:  
|       → fib(1) wählt if-Zweig und  
|       ← fib(1) gibt 1 zurück  
← fib(3) gibt 2 zurück

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Fibonacci-  
Folge

Definition der  
Fibonacci-Zahlen

Fibonacci in  
Python

Fibonacci iterativ

## Visualisierung



- Es gibt komplexere Formen der Rekursion: **mehrfach**, *indirekt, durch Argumente*.
- Es ist nicht ganz einfach, den Verlauf der Ausführung der `fib`-Funktion nachzuvollziehen.
- Dies ist aber auch nicht notwendig! Es reicht aus, sich zu vergegenwärtigen, dass:
  - falls die Funktion alles richtig macht für Argumente mit dem Wert  $< n$ ,
  - dann berechnet sie das Geforderte→ Prinzip der vollständigen Induktion
- Die mehrfachen rekursiven Aufrufe führen zu **sehr hoher Laufzeit!**
- Auch hier ist eine iterative Lösung (`while`-Schleife) möglich.

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Fibonacci-  
Folge

Definition der  
Fibonacci-Zahlen

Fibonacci in  
Python

Fibonacci iterativ

- Im Allgemeinen ist es schwierig, Mehrfachrekursion in Iteration umzuwandeln.
- Bei `fib` hilft die Beobachtung, dass man den Wert immer durch die Addition der letzten beiden Werte berechnen kann. Das geht auch **bei 0 startend!**
- Generiere die Werte aufsteigend, bis die Anzahl der erzeugten Werte den Parameter  $n$  erreicht.

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Fibonacci-  
Folge

Definition der  
Fibonacci-Zahlen

Fibonacci in  
Python

Fibonacci iterativ

## Python-Interpreter

```
>>> def ifib(n):  
...     if n <= 1:  
...         return n  
...     a = 0  
...     b = 1  
...     i = 2  
...     while i < n:  
...         new = a + b  
...         a = b  
...         b = new  
...         i += 1  
...     return a + b
```

## Visualisierung

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Fibonacci-  
Folge

Definition der  
Fibonacci-Zahlen

Fibonacci in  
Python

**Fibonacci iterativ**





- **Rekursion** ist eine bekannte Definitionstechnik aus der Mathematik.
- Rekursion erlaubt es, bestimmte Funktion sehr kurz und **elegant** anzugeben.
- Rekursion kann als Beispiel für das Konzept der **Selbstanwendung** verstanden werden, das in der Informatik weit verbreitet ist.
- Dies ist nicht immer die **effizienteste** Form! Das ist aber abhängig von der Programmiersprache.
- **Einfachrekursion** kann meist einfach in **Iteration** umgewandelt werden.
- **Mehrfachrekursion** ist komplizierter.
- Es gibt noch komplexere Formen der Rekursion.
- Interessant werden rekursive Funktionen bei **rekursiven Datenstrukturen**.

Rekursion  
verstehen

Fakultäts-  
funktion

Fibonacci-  
Folge

Definition der  
Fibonacci-Zahlen

Fibonacci in  
Python

Fibonacci iterativ