

Informatik I: Einführung in die Programmierung

28. Constraint Satisfaction, Backtracking und Constraint Propagierung

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



**UNI
FREIBURG**

Bernhard Nebel

02.02.2016

1 Motivation



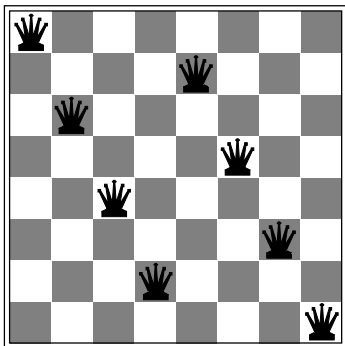
Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Constraint-
Propagierung

Schwierige Probleme (1)



Platziere die 8 Damen so, dass sie sich nicht schlagen können

			9			7	2	8
2	7	8			3		1	
	9					6	4	
	5			6		2		
		6				3		
	1			5				
1			7		6		3	4
			5		4			
7	9	1			8			5

Fülle die leeren Felder entsprechend der Sudoku-Regeln

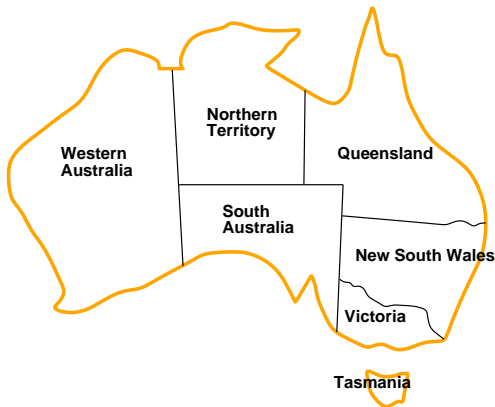
Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Schwierige Probleme (2)



Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Färbe die australischen Bundesstaaten so mit drei Farben ein, dass zwei aneinander stoßende Staaten nicht die gleiche Farbe haben.

Wo liegt der Fehler auf der letzten Folie?



Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Constraint-
Propagierung

Sicht auf die ANU (Australian National University) und den Telstra-Turm in der Hauptstadt Canberra. Canberra liegt innerhalb des *Australian Capital Territory* (ACT), das wiederum innerhalb von NSW liegt.

2 Constraint-Satisfaction-Probleme

- 3-Färbbarkeit
- 8-Damen-Problemen
- Sudoku (1)

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

3-Färbbarkeit

8-Damen-Problemen

Sudoku (1)

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Was haben 8 Damen, Sudokus, und das Färben einer Landkarte gemeinsam?



- Es handelt sich um **kombinatorische Probleme**, auch **Constraint-Satisfaction-Probleme (CSP)** genannt:
 - Es existieren n Variablen X_i , die Werte aus einem Bereich $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ annehmen können.
 - Es gibt Bedingungen (**Constraints**) für die Belegung der Variablen, die erfüllt sein müssen, z.B. $X_i \neq X_{2i}$ für alle i .
 - Eine **Lösung eines CSP** ist eine Belegung der Variablen mit Werten, so dass alle Constraints erfüllt sind.
- Diese Probleme zeichnen sich dadurch aus, dass der Raum der möglichen Lösungen (der **Suchraum**) oft astronomisch groß ist, und deshalb nicht vollständig abgesucht werden kann.
- Beispiel Sudoku: Meist müssen $81 - 17 = 64$ Felder mit den Ziffern 1 bis 9 belegt werden. Das sind $9^{64} \approx 10^{61}$ Möglichkeiten.

Motivation

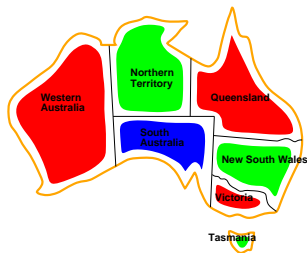
Constraint-Satisfaction-Probleme

3-Färbbarkeit
8-Damen-Problemen
Sudoku (1)

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

- Wir haben 7 **CSP-Variablen**: *WA, NT, SA, Q, NSW, V, T*.
- Diese können die **Werte** *red, blue, green* annehmen.
- Die **Constraints** sind: $WA \neq NT, WA \neq SA, NT \neq SA, NT \neq Q, SA \neq Q, SA \neq NSW, SA \neq V, Q \neq NSW, NSW \neq V$.
- Eine mögliche **Lösung** wäre:
 $WA = red, NT = green, SA = blue, Q = red, NSW = green, V = red, T = green$.



Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

3-Färbbarkeit
8-Damen-Problemen
Sudoku (1)

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

8 Damen platzieren (1)

- 16 **CSP-Variablen**: R_i, C_i (row, column) für die Damen $i = 1, \dots, 8$
- 8 verschiedene **Werte**: $k = 1, \dots, 8$ (für die jeweilige Reihe oder Spalte)
- **Constraints**:
 - 1 $R_i \neq R_j$ für alle $i \neq j$ (die Damen sollen in unterschiedlichen Reihen stehen)
 - 2 $C_i \neq C_j$ für alle $i \neq j$ (die Damen sollen in unterschiedlichen Spalten stehen)
 - 3 die Damen sollen nicht auf einer **gemeinsamen Diagonalen** stehen

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

3-Färbbarkeit

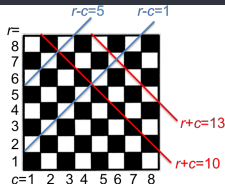
8-Damen-Problemen

Sudoku (1)

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

8 Damen platzieren (2): Diagonalen-Constraints



- Auf dem Schachbrett kann man die Diagonalen durch Summen bzw. Differenzen der Reihen- und Spalten-Indizes charakterisieren.
- Die Diagonalen von links oben nach rechts unten haben konstante Summen, die alle verschieden sind.
- D.h. $R_i + C_i \neq R_j + C_j$ für alle Damen i, j mit $i \neq j$ beschreibt die gewünschten Constraints.
- Die Diagonalen von links unten nach rechts oben haben konstante Differenzen, die ebenfalls alle verschieden sind.
- D.h. $R_i - C_i \neq R_j - C_j$ für $i \neq j$ sind die Constraints.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

3-Färbbarkeit

8-Damen-Problemen

Sudoku (1)

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung



- Es dauert rund 10^{-6} Sekunden, um eine Stellung zu testen.
- Wir können die erste Dame auf 64 verschiedene Felder stellen, die zweite auf 63, ...
- Wir haben $64!/(64 - 8)! \approx 1.8 \cdot 10^{14}$ Möglichkeiten. D.h. wir brauchen rund $1.8 \cdot 10^8$ Sekunden ≈ 7 Jahre Rechenzeit, um alle Stellungen zu testen.
- Da die Damen aber nicht unterscheidbar sind, und in jeder Reihe genau eine Dame stehen muss, können wir die Reihenvariablen mit $R_i = i$ vorbelegen.
- Damit ergeben sich dann nur noch $8^8 \approx 1.7 \cdot 10^7$ Möglichkeiten, entsprechend 17 Sekunden Rechenzeit.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

3-Färbbarkeit

8-Damen-Problemen

Sudoku (1)

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

- Ein **Sudoku-Feld** besteht aus 81 Zellen, in denen jeweils die Ziffern 1 bis 9 eingetragen werden sollen.
- Diese werden gerne wie folgt durchnummeriert:

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9
D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9
E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9
G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9
H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9
I1	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9

- Jeweils neun Zellen einer **Zeile**, einer **Spalte** oder eines **Blocks** bilden eine **Gruppe**.
- In jeder Gruppe müssen die Ziffern 1 bis 9 genau einmal vorkommen.
- Für eine gegebene Zelle heißen alle Zellen, die in einer Gruppe mit dieser Zelle vorkommen, **Peers dieser Zelle**.
- Die Peers einer Zelle müssen alle einen anderen Wert als die Zelle haben!

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

3-Färbbarkeit

8-Damen-Problemen

Sudoku (1)

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung



- Wir haben 81 **CSP-Variablen**: $A_1 \dots A_8$,
- Diese können die **Werte** 1, 2, ... 9 annehmen.
- Die **Constraints** sind: Jede Zelle muss einen Wert besitzen, der verschieden ist von den Werten ihrer Peers.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

3-Färbbarkeit

8-Damen-Problemen

Sudoku (1)

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung



- Der **Suchraum** hat in den meisten Fällen (17 Vorgaben) eine Größe von ca. 10^{61} möglichen Kombinationen.
- Würden wir eine Milliarde (10^9) Kombinationen pro Sekunde testen können, wäre die **benötigte Rechenzeit** $10^{61} / (10^9 \cdot 3 \cdot 10^7) \approx 3 \cdot 10^{44}$ Jahre.
- Die **Lebensdauer** des Weltalls wird mit 10^{11} Jahren angenommen (falls das Weltall geschlossen ist).
- Selbst bei einer **Beschleunigung** um den Faktor 10^{30} würde die Rechnung nicht innerhalb der Lebensdauer des Weltalls abgeschlossen werden können.
- Trotzdem scheint das Lösen von Sudokus ja nicht so schwierig zu sein ...

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

3-Färbbarkeit

8-Damen-Problemen

Sudoku (1)

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

3 Backtracking-Suche



- Oz-Backtracking
- 8-Damen-Backtracking
- Sudoku-Backtracking

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung



- Bei den genannten Abschätzungen wurde ja immer davon ausgegangen, dass wir immer **alle CSP-Variablen** mit Werten belegen und dann testen, ob es eine Lösung ist.
- Dabei würden wir aber viele Kombinationen testen, die ganz **offensichtlich** keine Lösungen sind.
- Wenn z.B. beim Australienproblem *WA* und *NT* mit der gleichen Farbe belegt wurden, dann werden alle Vervollständigungen keine Lösung sein!
- Man kann an dieser Stelle **abkürzen** und z.B. für *NT* eine andere Farbe ausprobieren.
- Idee: Schrittweise Werte an CSP-Variablen zuweisen, wobei die Constraints der schon zugewiesenen CSP-Variablen immer **erfüllt** sein müssen.
- Wichtig: Dabei muss man manchmal auch Entscheidungen **rückgängig** machen, wenn wir keine Vervollständigung finden können.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung

Rekursive Suche mit Rücksetzen



- 1 **Wähle** eine noch unbelegte CSP-Variable aus.
- 2 Weise der CSP-Variablen einen **Wert** zu, der alle Constraints mit schon belegten CSP-Variablen erfüllt.
- 3 Versuche **rekursiv** eine Belegung für die restlichen CSP-Variablen zu finden.
- 4 Gelingt dies, sind wir **fertig** und geben die Belegung zurück.
- 5 Nimm ansonsten die Belegung der CSP-Variablen zurück, wähle einen bisher noch **nicht ausprobierten** Wert und belege die CSP-Variable damit. Mache mit Schritt 3 weiter.
- 6 Wurden alle Werte erfolglos probiert, gebe **False** zurück.

Man nennt diese Art der Suche auch **Backtracking**-Suche, da man im Schritt 5 einen Schritt **zurück nimmt** und etwas anderes probiert.

Statt Rücksetzen kann man beim rekursiven Aufruf in Schritt 3 natürlich eine **Kopie** der Variablenbelegung nutzen.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

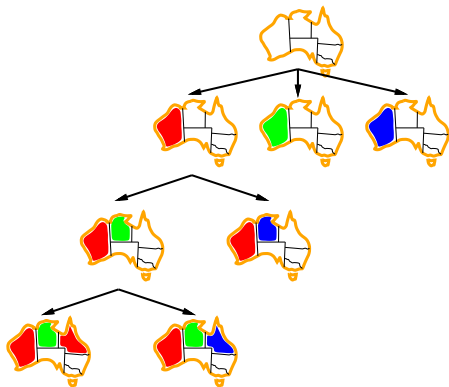
Oz-Backtracking

8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung

Für unser Beispiel zum Einfärben der australischen Landkarte könnte das so aussehen:



Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung



oz.py(1)

```
varlist = ('WA', 'NT', 'SA', 'Q', 'NSW', 'V', 'T' )
domain = ('red', 'green', 'blue')
neighbor = dict(WA={'NT', 'SA'}, NT= {'WA', 'SA', 'Q'},
               SA={'WA', 'NT', 'Q', 'NSW', 'V'},
               Q={'NT', 'SA', 'NSW'}, NSW={'Q', 'SA', 'V'},
               V ={'SA', 'NSW'}, T={})
```

- **Variablennamen** und **Werte** als Strings innerhalb von Tupeln aufzählen.
- **Constraints** als ein dict, in dem für jeden Staat die Nachbarstaaten angegeben werden.
- **Belegungen** werden über dicts realisiert, die dynamisch wachsen.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung



- Um ein Element aus einer Liste zu **wählen**, benutzen wir die Funktion `some`:

`oz.py(2)`

```
def some(seq):  
    for e in seq:  
        if e: return e  
    return False
```

- Funktioniert ähnlich wie **any**, gibt aber ein Element zurück, wenn ein nicht-False Element vorhanden ist.

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung

Backtracking in Oz – mit Python (3)



- Die Funktion `assign(vals, x, d)` führt die Zuweisung des Wertes `d` an die CSP-Variable `x` durch:

`oz.py(3)`

```
def assign(vals, x, d):  
    "assign d to var x if feasible, otherwise return False"  
    for y in vals:  
        if x in neighbor[y] and vals[y] == d:  
            return False  
    vals[x] = d  
    return vals
```

- `vals` ist das dict, in dem die **Belegung** aufgebaut wird.
- Erst testen, ob der Wert `d` ein **möglicher Wert** für die Variable `x` ist, indem die **Constraints** für bereits belegte CSP-Variablen überprüft werden.
- Falls nicht, `False` zurück geben.
- Ansonsten wird `vals` **erweitert** und zurück gegeben.

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung



oz.py(4)

```
def search(vals):
    "Recursively search for a satisfying assignment"
    if vals is False: return False # failed earlier
    nextvar = some(x for x in varlist if x not in vals)
    if not nextvar:
        return vals # we have found a complete assignment
    else:
        return some(search(assign(vals.copy(), nextvar, d))
                    for d in domain)
```

- vals kann False werden, wenn **assign** einen Wert nicht zulässt.
- vals wird vor jedem Aufruf von **assign** **kopiert!**
- Dann müssen wir die Belegung **nicht** nach dem rekursiven Aufruf **rückgängig** machen.

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung

oztrace.py

```
def assign(vals, x, d):
    print(" "*len(vals), "check value %s for var %s" % (d, x))
    for y in vals:
        if x in neighbor[y] and vals[y] == d:
            print(" "*len(vals), "not possible!")
            return False
    print(" "*len(vals), "trying out ...")
    vals[x] = d
    return vals
```

Motivation
Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking
8-Damen-
Backtracking
Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung

Python-Interpreter

```
>>> search(dict())
check value red for var WA
trying out ...
    check value red for var NT
    ...
```



- Erzeuge **alle Lösungen** mit einem **Generator**.
- **Fehlschläge** müssen nicht zurück geben werden.
- Achtung: Der rekursive Generator muss in einer **for**-Schleife aufgerufen werden.
- Essentiell: **Kopieren** von vals.

ozgen.py

```
def search(vals):  
    "Recursively search for a satisfying assignment"  
    if vals is not False:  
        nextvar = some(x for x in varlist if x not in vals)  
        if not nextvar:  
            yield vals # we have found a complete assignment  
        else:  
            for d in domain:  
                for result in search(assign(vals.copy(),  
                                           nextvar, d)): yield result
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung

Wie sollte man die nächste zu belegende CSP-Variable auswählen?

- Für die **Korrektheit** ist es egal, welche Variable man wählt.
 - Es kann aber für die **Laufzeit** Unterschiede machen.
- Eine gute **Heuristik** ist es, die Variable zu wählen, die die **wenigsten noch möglichen Werte** besitzt.
- Grund: Reduktion der **Verzweigung** im Aufrufbaum weit oben.
 - Beispiel:



Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking

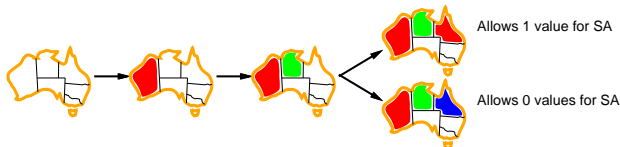
8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung

In welcher Reihenfolge sollte man die Werte durchprobieren?

- Für die **Korrektheit** egal.
- Wenn man **schnell** eine Lösung finden will, sollte man mit den Werten beginnen, die die anderen Variablen **möglichst wenig einschränkt**.
- Erfordert allerdings, dass wir **voraus schauen** und bestimmen, welche Werte bei anderen Variablen noch möglich sind.
- Beispiel:



- Wir werden im Weiteren aber sowohl Variablen- als auch Werte-Auswahl erst einmal einfach halten.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung

Backtracking für 8 Damen – mit Python (1)



- Für die **Problemrepräsentation** beim 8-Dame-Problem bietet es sich an, die Belegung durch ein Tupel `col` zu repräsentieren, bei dem der i -te Eintrag für die Spalte steht, in der die i -te Dame steht, wobei Dame i in der i -ten Reihe steht ($i = 0, \dots, 7$).
- Die **Constraints** ergeben sich dann, wie weiter oben beschrieben.

8queens.py (1)

```
def assign(col, x, d):  
    for y in range(len(col)):  
        if col[y] == d: # same column?  
            return False  
        if (col[y] + y == d + x or # same diagonal?  
            col[y] - y == d - x):  
            return False  
    return col + (d,) # return copy!
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung



- Die eigentlich Suchfunktion sieht ganz **ähnlich** aus wie im Fall der 3-Färbbarkeit von Australien.
- **Kopiert** wird hier die neue Belegung bereits in `assign`, da wir mit Tupeln arbeiten.

8queens.py (2)

```
def search(col):
    if col is False: return False
    nextvar = len(col)
    if nextvar == 8:
        return col
    else:
        for d in range(8):
            result = search(assign(col, nextvar, d))
            if result: return result
        return False
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking
8-Damen-
Backtracking
Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung

- Eigentlich würden wir ja gerne sehen, wie das Schachbrett dann aussieht.

8queens.py (3)

```
def display(col):
    for i in range(8):
        print(".", *col[i], "X ", ".", *(7-col[i]),
              sep="")

if __name__ == "__main__":
    display(search(()))
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

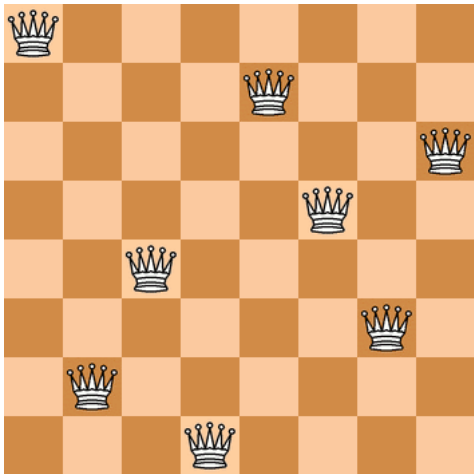
Oz-Backtracking

8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung

Backtracking für 8 Damen



Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung



- Und wie sähe das aus, wenn wir Generatoren einsetzen wollten?
- Statt `return`, `yield`.
- **Keine Fehlschläge**, sondern nur die erfolgreichen Zweige weiter verfolgen!
- Aufrufe nur in **for-Schleifen**.
- Verschiedene Lösungen unterscheidbar machen (Leerzeile nach jeder Lösung).

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung

Backtracking für Sudokus (1): Adressierung der Felder



Die Formalisierung der Constraints ist aufwändig:

`sudoku.py` (1)

```
def cross(A, B):
    return [a+b for a in A for b in B]
digits    = '123456789'
digits0p  = digits + '0.'
rows      = 'ABCDEFGHI'
cols      = digits
squares   = cross(rows, cols)
unitlist  = ([cross(rows, c) for c in cols] +
             [cross(r, cols) for r in rows] +
             [cross(rs, cs) for rs in ('ABC','DEF','GHI')
              for cs in ('123','456','789')])
units     = dict((s, [u for u in unitlist if s in u])
                 for s in squares) # s -> all units of s
peers     = dict((s, set(sum(units[s],[]))-set([s]))
                 for s in squares) # s -> set of peers of s
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking
8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung

Sudoku-Backtracking (2): Belegung und Constraints



- Belegungen werden wie im Falle der Färbbarkeit durch ein dict repräsentiert.
- Die **CSP-Variablen** sind durch die Liste squares gegeben:
['A1', 'A2', ..., 'A9', 'B1', 'B2', ..., 'I9']
- unitlist ist eine Liste, deren Elemente Listen sind, die jeweils alle Felder einer **Gruppe** enthalten:
[['A1', 'B1', ..., 'I1'], ['A2', 'B2', ..., 'I2'],
..., ['A1', 'A2', ..., 'A9'], ..., ['A1', 'A2',
'A3', 'B1', 'B2', ... 'C3'], ...]
- units spezifiziert für jedes Feld, in welchen **Gruppen es Mitglied ist**:
{ 'A1': [['A1', ..., 'I1'], ['A1', ..., 'A9'],
['A1', ..., 'C3']], ... }
- peers spezifiziert für jedes Feld die Menge der **Peers**:
{ 'D8': {'E9', 'E8', 'D9', 'G8', 'D2', 'D3', 'D1',
'D6', 'D7', ...}, ... }

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung

Sudoku-Backtracking (3): Parsing



- Wir wollen ja **verschiedene Sudokus** lösen.
- D.h. wir müssen die Aufgabe **parsen** und in eine **interne Struktur** überführen.
- Aufgabe besteht aus 81 Zeichen 0 – 9 und '.', wobei 0 und '.' für ein leeres Feld stehen.
- Alle anderen Zeichen werden **ignoriert**. D.h. wir können die Aufgabe auch als Tabelle angeben.

sudoku.py (2)

```
def parse_grid(grid):  
    values = dict()  
    for s,d in (zip(squares, [c for c in grid  
                           if c in digits0p])):  
        if d in digits and not assign(values, s, d):  
            return False  
    return values
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking
8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung

Sudoku-Backtracking (3): Ausgabe



- Die Lösungen sollen natürlich auch **dargestellt** werden.
- `display` gibt eine Belegung aus.

`sudoku.py` (3)

```
def display(values):
    "Display values as a 2-D grid."
    if not values:
        print("Empty grid")
        return
    line = '+' .join(['-'*6]*3)
    for r in rows:
        print(''.join(values.get(r+c, '.') + ' ' +
                        ('|' if c in '36' else ' ')
                        for c in cols))
        if r in 'CF': print(line)
    print()
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung

Sudoku-Backtracking (4): assign



- Die Zuweisung funktioniert wieder ähnlich wie in den beiden anderen Fällen.
- D.h. es werden die **Constraints** überprüft und im **Erfolgsfall** die erweiterte Belegung zurück gegeben.
- Ansonsten wird **False** zurück gegeben.

sudoku.py (4)

```
def assign(values, s, d):  
    "Try to assign value d to square s"  
    if s not in values and all(values[p] != d  
                               for p in values  
                               if p in peers[s]):  
        values[s] = d  
        return values  
    return False
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung



- Völlig analog zu den beiden vorherigen Fällen:

sudoku.py (5)

```
def search(values):
    "Search for solution"
    if not values: return False # failed earlier
    s = some(s for s in squares if s not in values)
    if not s: return values
    return some(search(assign(values.copy(), s, d))
                for d in digits)
```

```
import time
```

```
def timed_search(grid):
    start = time.process_time()
    search(parse_grid(grid))
    return time.process_time() - start
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung

Sudoku-Backtracking (6): In Aktion ...



Python-Interpreter

```
>>> grid1=''003020600 900305001 001806400 008102900
... 700000008 006708200 002609500 800203009
... 005010300''
>>> display(search(parse_grid(grid1)))
```

```
4 8 3 |9 2 1 |6 5 7
9 6 7 |3 4 5 |8 2 1
2 5 1 |8 7 6 |4 9 3
-----+-----+-----
5 4 8 |1 3 2 |9 7 6
7 2 9 |5 6 4 |1 3 8
1 3 6 |7 9 8 |2 4 5
-----+-----+-----
3 7 2 |6 8 9 |5 1 4
8 1 4 |2 5 3 |7 6 9
6 9 5 |4 1 7 |3 8 2
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-
Backtracking

Sudoku-
Backtracking

Constraint-
Propagierung

Sudoku-Backtracking (6): Performanz



Python-Interpreter

```
>>> timed_search(grid1)
0.01417400000013913
>>> timed_search(grid2)
660.3158369999999
>>> timed_search(hard1)
24.770020000000002
>>> timed_search(hard2)
0.693335000000161
>>> timed_search(hard3)
28.898888999999826
```

- hard1 und hard2 sind zwei von dem finnischen Mathematiker Arto Inkala entworfene Sudokus, die er als „die schwersten“ Sudokus bezeichnet.
- hard3 (von Peter Norvig) ist auch für Computer eine harte Nuss; aber es ist kein Sudoku, da nicht eindeutig.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung



- Mit Hilfe der Backtracking-Suche kann man auch sehr **große Suchräume** absuchen.
- Die Methode garantiert, dass wir eine **Lösung finden**, wenn eine existiert.
- Die tatsächlich notwendige Zeit kann **stark schwanken**.
- Können wir vielleicht weitere **Abkürzungen** bei der Suche einsetzen?

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Oz-Backtracking

8-Damen-Backtracking

Sudoku-Backtracking

Constraint-Propagierung

4 Constraint-Propagierung



- Die Idee
- Sudoku-Constraint-Propagierung

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-Propagierung



- Im Zusammenhang mit der **Auswahl** der nächsten Variable und des nächsten Wertes wurde bereits erwähnt, dass man die noch **möglichen Werte** pro Variable kennen sollte.
- Idee: Wann immer ein Wert fest gelegt wird, **eliminiere** jetzt unmögliche Werte für andere Variablen.
- **Forward-Checking** – erlaubt uns die Suche früher abubrechen.
- Beispiel: Wenn im Färbbarkeitsbeispiel $WA = red$ gewählt wird, dann kann man für NT red ausschließen.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

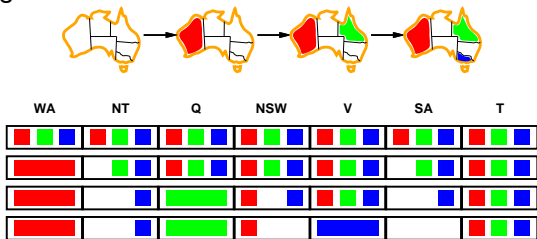
Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-Propagierung

- Nach Zuweisung eines neuen Wertes an Variable X eliminiere in allen über Constraints verbundene Variablen jetzt nicht mehr möglichen Werte.
- Leite Backtracking ein, wenn für eine Variable kein Wert mehr möglich ist.



- Für SA ist jetzt kein Wert mehr möglich! Bereits jetzt kann Backtracking eingeleitet werden.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-Propagierung

Forward-Checking: Übersehene Probleme



- Forward-Checking übersieht manchmal Probleme, da nur Information von belegten Variablen zu unbelegten Variablen fließt:



- Da SA und NSW benachbart sind, ist *blue* für NSW nicht mehr möglich.
- Schlimmer: Da SA und NT benachbart sind, kann auch für NT der Wert *blue* ausgeschlossen werden.
- Generell: Immer wenn irgendwo ein Wert **eliminiert** wird, sollte man bei den über Constraints „verbundenen“ Variablen Werte eliminieren.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-Propagierung

- Wir merken uns bei jedem Feld, welche Ziffern noch möglich sind.
- Wird eine Ziffer **eliminiert**, überprüfen wir:
 - Hat das Feld jetzt nur noch eine einzige Möglichkeit, dann kann die Möglichkeit bei allen **Peers** eliminiert werden.
 - Ist in **einer Gruppe** eine bestimmte Ziffer nur noch in einem Feld möglich, so können wir die Ziffer hier platzieren (und alle anderen Möglichkeiten eliminieren).
- Jede Eliminierung stößt diesen Prozess wieder an.
- Man kann noch **weitere Regeln** aufstellen (speziell mit 2 und mehr Feldern/Werten) ...

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-Propagierung



- Wir benutzen **Strings** von Ziffern um die Mengen der möglichen Werte zu repräsentieren.
- Eigentlich wäre ja der Datentyp **Set** angemessener.
- Aber das würde bedeuten, dass wir statt der **copy**-Methode die **copy.deepcopy()**-Funktion benutzen müssten, die sehr viel ineffizienter ist.
- Und mit Strings haben wir auch alle Mengen-Operationen, die wir benötigen.

sudokucp.py (1)

```
def parse_grid(grid):  
    values = {(s, digits) for s in squares}  
    for s,d in (zip(squares, [c for c in grid  
                           if c in digits0p])):  
        if d in digits and not assign(values, s, d):  
            return False  
    return values
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Constraint-
Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-
Propagierung



- Um auch **nicht fertig** gelöste Sudokus ausgegeben zu können, soll die `display`-Funktion so erweitert werden, dass sie alle Werte für die Felder ausgeben kann.

`sudokucp.py` (2)

```
def display(values):
    "Display values as a 2-D grid."
    if not values:
        print("Empty grid")
        return
    width = 1+max(len(values[s]) for s in squares)
    line = '+' .join(['-'*(width*3)]*3)
    for r in rows:
        print(''.join(values[r+c].center(width) +
                       ('|' if c in '36' else ' ')
                       for c in cols))
        if r in 'CF': print(line)
    print()
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Constraint-
Propagierung

Die Idee
Sudoku-Constraint-
Propagierung



- assign **eliminiert** jetzt alle Werte außer dem zugewiesenen.
- Treten bei der Eliminierung Fehler auf, dann ist die Zuweisung nicht möglich

sudokucp.py (3)

```
def assign(values, s, d):  
    "Try to assign value d to square s"  
    others = values[s].replace(d, '')  
    if all(eliminate(values, s, e) for e in others):  
        return values  
    return False
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Constraint-
Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-
Propagierung

Verwalten der möglichen Werte: Eliminierung



- Nach der Eliminierung muss getestet werden, ob Lösung noch **möglich**.
- Dann werden die zwei **Propagierungsregeln** angewendet.

sudokucp.py (4)

```
def eliminate(values, s, d):
    if d not in values[s]:
        return values # already eliminated
    values[s] = values[s].replace(d, '')
    if not values[s]: # no more values left for s
        return False
    # check if value[s] has only one value left
    if not propagate_single_value(values, s):
        return False
    # check if unit has only a single square for value d
    if not propagate_single_square(values, s, d):
        return False
    return values
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Constraint-
Propagierung

Die Idee
Sudoku-Constraint-
Propagierung

Verwalten der möglichen Werte: Propagierung



- Die beiden Propagierungsregeln:

sudokucp.py (5)

```
def propagate_single_value(values, s):  
    if len(values[s]) == 1:  
        return all(eliminate(values, s2, values[s])  
                   for s2 in peers[s])  
    return True
```

```
def propagate_single_square(values, s, d):  
    for u in units[s]:  
        dplaces = [s for s in u if d in values[s]]  
        if len(dplaces) == 0:  
            return False # contradiction!  
        elif len(dplaces) == 1:  
            if not assign(values, dplaces[0], d):  
                return False  
    return True
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Constraint-
Propagierung

Die Idee
Sudoku-Constraint-
Propagierung



- Geänderte **Erfolgsbedingung** (alle Var. haben genau einen Wert)
- Geänderte **Variablenauswahl** (kleinster Wertebereich)
- Geänderte **Werteselektion** (nur mögliche Werte)

sudokucp.py (6)

```
def search(values):  
    "Search for solution"  
    if not values: return False # failed earlier  
    if all(len(values[s]) == 1 for s in squares):  
        return values  
    _,s = min((len(values[s]), s) for s in squares  
              if len(values[s]) > 1)  
    return some(search(assign(values.copy(), s, d))  
               for d in values[s])
```

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Constraint-
Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-
Propagierung



Python-Interpreter

```
>>> display(parse_grid(grid1))
```

```
4 8 3 |9 2 1 |6 5 7
9 6 7 |3 4 5 |8 2 1
2 5 1 |8 7 6 |4 9 3
-----+-----+-----
5 4 8 |1 3 2 |9 7 6
7 2 9 |5 6 4 |1 3 8
1 3 6 |7 9 8 |2 4 5
-----+-----+-----
3 7 2 |6 8 9 |5 1 4
8 1 4 |2 5 3 |7 6 9
6 9 5 |4 1 7 |3 8 2
```

Das Sudoku wurde bereits beim **Einlesen** gelöst! Tatsächlich ist das bei allen einfachen Sudokus so.

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Constraint-
Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-
Propagierung

Python-Interpreter

```
>>> display(parse_grid(grid2))
```

4	1679	12679		139	2369	269		8	1239	5
26789	3	1256789		14589	24569	245689		12679	1249	124679
2689	15689	125689		7	234569	245689		12369	12349	123469

3789	2	15789		3459	34579	4579		13579	6	13789
3679	15679	15679		359	8	25679		4	12359	12379
36789	4	56789		359	1	25679		23579	23589	23789

289	89	289		6	459	3		1259	7	12489
5	6789	3		2	479	1		69	489	4689
1	6789	4		589	579	5789		23569	23589	23689

Hier gibt es offensichtlich noch viele **offene Möglichkeiten!**

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee
Sudoku-Constraint-Propagierung



Python-Interpreter

```
>>> timed_search(grid1)
0.008320000000000001
>>> timed_search(grid2)
0.013170000000000001
>>> timed_search(hard1)
0.009936999999999988
>>> timed_search(hard2)
0.013539999999999996
>>> timed_search(hard3)
118.054612
```

- Praktisch alle Sudokus können so in weniger als einer Sekunde gelöst werden.
- `hard3` ist eine Ausnahme – allerdings auch kein eindeutig lösbares Sudoku.

Motivation

Constraint-
Satisfaction-
Probleme

Backtracking-
Suche

Constraint-
Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-
Propagierung



- **Backtracking** zusammen mit **Constraint-Propagierung** ist eine extrem mächtige Technik, um schwierige kombinatorische Probleme zu lösen.
- Wird auch in anderen Kontexten (z.B. **SAT-Solving** mit Millionen von Variablen) erfolgreich eingesetzt.
- Es gibt aber immer wieder Probleminstanzen, die sich als **extrem schwierig** heraus stellen.
- Ab einer gewissen **Größe** (verallgemeinertes Sudoku!) wird es wirklich schwierig, wenn die Probleminstanzen nicht einfach durch Constraint-Propagierung lösbar sind.
- Es handelt sich hier um die so genannten **NP-vollständigen** Probleme.
- Und es gibt viel aktive Forschung in der Informatik, diesen Problemen zu Leibe zu rücken.

Motivation

Constraint-Satisfaction-Probleme

Backtracking-Suche

Constraint-Propagierung

Die Idee

Sudoku-Constraint-Propagierung