Informatik I: Einführung in die Programmierung

25. Laufzeitanalyse von Algorithmen

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Bernhard Nebel

22.01.2015

1 Motivation

Motivation

Laufzeit von Algorithmen

O-Notation

Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Skalierbarkeit

Komplexitätstheorie

Quadratische Falle

Zusammenfassung

Motivation

UNI FREIBURG

- Wir haben Werkzeuge kennen gelernt, mit den denen man Laufzeit-Flaschenhälse in Programmen identifizieren kann.
- Wir haben auch ein paar Ideen, wie man die Laufzeit verbessern kann.
- Dies ist aber im wesentlichen auf der Ebene des konkreten Programms.
- Wenn der dem Programm zu Grunde liegende Algorithmus schlecht (ineffizient) ist, dann bringen kleine Laufzeitverbesserungen wenig.
- In der Informatik untersucht man Algorithmen meist darauf, wie gut sie skalieren: Wie stark wächst die Laufzeit (oder der Speicherplatzbedarf) mit der Größe der Eingabe?

Motivation
Laufzeit von Algorithmen
O-Notation
Bestimmung der asymptotischen Laufzeit
Skalierbarkeit
Komplexitätstheorie
Quadratische Falle
Zusammenfassung

2 Laufzeit von Algorithmen

Laufzeit von Algorithmen

- Wie misst man die Laufzeit von Algorithmen?
- Man identifiziert die (etwa gleich teuren) Grundoperationen (z.B. Vergleiche, arithmetische Operationen, Zuweisungen usw.) und bestimmt, wie häufig sie bei der Ausführung des Algorithmus A bei einer bestimmten Eingabe x ausgeführt werden.
- Dies sei die (abstrakte) Laufzeit von A auf x: $T_A(x)$.
- Darauf basierend kann man über alle Eingaben der Größe n gehen und die Laufzeit für die Größe n im besten, im schlechtesten und im mittleren Fall bestimmen:
  - Bester Fall: $T_A^b(n) = \min\{T_A(x) : |x| = n, x \text{ Eingabe für } A\}$
  - Schlechtester Fall: $T_A^w(n) = \max\{T_A(x) : |x| = n, x \text{ Eingabe für } A\}$
  - Mittlerer Fall: Sei $q_n(x)$ die Wahrscheinlichkeit, dass x unter den Eingaben der Länge n auftritt: $T_{A,q_n}^a(n) = \sum_{|x|=n, x \text{ Eingabe für } A} T_A(x) q_n(x)$

Motivation
Laufzeit von Algorithmen
O-Notation
Bestimmung der asymptotischen Laufzeit
Skalierbarkeit
Komplexitätstheorie
Quadratische Falle
Zusammenfassung

Beispiel: Suche in einer Liste

Wir wollen feststellen, ob in einer Liste von n Elementen ein bestimmtes Element vorhanden ist. Dies können wir durch folgenden Algorithmus (formuliert in Python) erreichen:

```
def search(el, li):
  for e in li:
    if e == el: return True
  return False
```

Ist ein Schleifendurchlauf, ein Test und Rückgabe jeweils eine Operation mit den Zeitkosten 1, dann können wir folgende Laufzeiten konstatieren:

- Bester Fall: $T_A^b(n) = 3$ (gesuchtes Element an erster Stelle)
- Schlechtester Fall: $T_A^w(n) = 2n + 1$
- Mittlerer Fall: Falls $m > n$ mögliche Eingaben für das `element`-Argument möglich sind und diese gleichverteilt sind, dann gilt: $T^a_{A,q_n}(n) = \frac{(m-n)}{m} \cdot (2n+1) + \frac{n}{m} \cdot \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot (2i+1)$.

Motivation
Laufzeit von Algorithmen
O-Notation
Bestimmung der asymptotischen Laufzeit
Skalierbarkeit
Komplexitätstheorie
Quadratische Fälle
Zusammenfassung

Laufzeitwachstum

- Wir sehen, dass die Laufzeit im schlechtesten und mittleren Fall linear mit der Größe der Eingabe wächst.
- Hier ist es auch ganz unerheblich, ob z.B. ein `return`-Statement mehr Zeitkosten als ein Vergleich benötigt. Die echten Operatorkosten sind weitgehend egal.
- Für das Laufzeitwachstum (man spricht auch vom asymptotischen Laufzeitverhalten) sind i.W. die Anzahl der Schleifendurchläufe entscheidend.
- Man betrachtet dabei meist den schlechtesten Fall, da er einfach zu bestimmen ist und eine Garantie abgibt.
- Der mittlere Fall ist meist nur schwierig zu bestimmen und man benötigt viele Annahmen.
- Der beste Fall ist meist nicht sehr aussagekräftig.

Ein besserer Algorithmus?

Wenn wir feststellen wollen, ob ein Element in einer Liste vorhanden ist, geht das auch so:

```
def fast_search(el, li):
  if el in li: return True
  return False
```

- Wenn wir annehmen, dass der `in`-Test nur Zeitkosten 1 hat, dann wäre unser Test im schlechtesten und mittleren Fall tatsächlich schneller.
- Das stimmt aber nicht, wenn es sich um Listen handelt!
- Auch Python muss die Liste von vorne nach hinten durchsuchen und jedes einzelne Element anschauen, macht dies aber schneller, z.B. in Zeit $0.1n$ statt $2n+1$.
- Python (und viele andere Sprachen) enthalten Operationen, deren Zeitkosten durchaus nicht konstant sind, sondern z.B. linear von den Daten abhängen.

Suche in sortierten Listen (1)

- Nehmen wir an, dass die Liste sortiert ist, so gibt es einen effizienteren Suchalgorithmus: Die binäre Suche.
- Wir gehen ähnlich wie bei einer Suche im Telefonbuch vor:
  1. Wir betrachten das ganze Buch als interessant.
  2. Wir wählen im interessanten Bereich die mittlere Seite und schauen ob der gesuchte Name da steht. Falls ja, sind wir fertig.
  3. Falls der Name später in der Lexikon-Ordnung kommt, dann konzentrieren wir uns auf die hintere Hälfte.
  4. Ansonsten auf die vordere Hälfte.
  5. Die neue ausgewählte Hälfte ist unser neuer interessanter Bereich und wir machen mit Schritt 2 weiter.
- Wie schnell können wir in 2^n Seiten feststellen, ob ein Name vorhanden ist (im schlechtesten Fall?)

Suche in sortierten Listen (2)

- Wir haben zwei Variablen `left` und `right`, die uns den interessanten Bereich beschreiben.
- Die Mitte ist jeweils `(left+right)//2`.
- Wenn der interessante Bereich leer ist (`left > right`), dann ist das Element nicht vorhanden.

```
def bin_search(el, sli):
  left, right = 0, len(sli) - 1
  while left <= right:
    mid = (left+right)//2
    if sli[mid] < el: left = mid + 1
    elif sli[mid] > el: right = mid - 1
    else: return True
  return False
```

- Wie viele Schleifendurchläufe brauchen wir hier?

Analyse der binären Suche

UNI FREIBURG

- Bei jedem Schleifendurchlauf wird der interessierende Bereich halbiert, ggfs. plus eins. Da `mid` $+1$ oder -1, ist es immer höchstens die Hälfte.
- D.h. wir haben maximal $\lceil \log_2 n \rceil$ Schleifendurchläufe.
- In jedem Schleifendurchlauf haben wir maximal 2 Zuweisungen, 3 Vergleiche, eine Addition, und eine Division. Seien die Zeitkosten dafür jeweils 1. Dann sind die Schleifenkosten 7 Einheiten.
- Dazu kommen 2 Zuweisungen, eine Subtraktion, eine Längenbestimmung und zum Schluss ein `return`-Statement.
- Zeitkosten im schlechtesten Fall: $5 + 7\lceil \log_2 n \rceil$.

Motivation

Laufzeit von Algorithmen

O-Notation

Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Skalierbarkeit

Komplexitätstheorie

Quadratische Falle

Zusammenfassung

3 Die O-Notation

Motivation

Laufzeit von Algorithmen

O-Notation

Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Skalierbarkeit

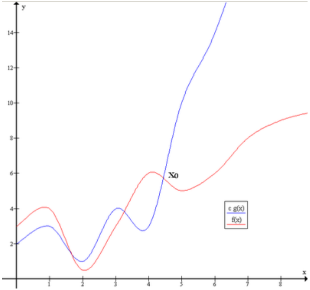
Komplexitätstheorie

Quadratische Falle

Zusammenfassung

Landausche O-Notation

- Mit $O(g)$ bezeichnet man die Menge von Funktionen f, für die gilt:
  $\exists c \in \boldsymbol{R}^+, x_o \in \boldsymbol{R}^+, \forall x > x_o : f(x) \leq cg(x)$.
- D.h. $O(g)$ umfasst alle Funktionen f, die nicht schneller wachsen als g (wenn man konstante Faktoren ignoriert und endliche Anfangsstücke vernachlässigt).



Motivation
Laufzeit von Algorithmen
O-Notation
Bestimmung der asymptotischen Laufzeit
Skalierbarkeit
Komplexitätstheorie
Quadratische Falle
Zusammenfassung

O-Notation: Beispiel

- Beispiel: Für $f(n) = n^2$ und $g(n) = 25n$ gilt:
- $g \in O(f)$, da
  - für $c = 25$ und $n_0 = 1$: $\forall n > n_0 : g(n) \leq cf(n)$, da
  - $25n \leq 25n^2$ für alle $n > 1$;
- $f \notin O(g)$:
  - Wir nehmen an, dass $f \in O(g)$ gilt.
  - Seien c und n_o so gewählt, dass die Bedingung $\forall n > n_0 : f(n) \leq cg(n)$, erfüllt ist, also gilt:
  - $n^2 \leq 25cn$ für alle $n > n_o$;
  - Wähle $n_1 = 25c + 1$; dann gilt aber für alle $n > n_1$: $n^2 > 25cn$, was ein Widerspruch ist.
  - Unsere Annahme $f \in O(g)$ muss also falsch sein, d.h. $f \notin O(g)$.

Motivation
Laufzeit von Algorithmen
O-Notation
Bestimmung der asymptotischen Laufzeit
Skalierbarkeit
Komplexitätstheorie
Quadratische Falle
Zusammenfassung

Notationskonventionen und Rechenregeln

- Man schreibt oft $f = O(g)$, meint aber $f \in O(g)$.
- Insbesondere folgt aus $f = O(g)$ nicht $O(g) = f$!
- Statt „$O(f)$ mit $f(n) = n^2 + 2n + 4$" schreibt man $O(n^2 + 2n + 4)$.
- Einfache Regeln:
  - $f = O(f)$ (= bedeutet $\in$)
  - $O(O(f)) = O(f)$ (= bedeutet hier und im weiteren $\subseteq$)
  - $O(kf) = O(f)$ für eine Konstante $k > 0$
  - $O(k + f) = O(f)$ für eine Konstante $k \geq 0$
  - Additionsregel: $O(f) + O(g) = O(\max\{f, g\})$
  - Multiplikationsregel: $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$

Motivation
Laufzeit von Algorithmen
O-Notation
Bestimmung der asymptotischen Laufzeit
Skalierbarkeit
Komplexitätstheorie
Quadratische Falle
Zusammenfassung

Die Additionsregel

- Additionsregel: $O(f) + O(g) = O(\max\{f, g\})$.
- Mit $O(f) + O(g)$ ist gemeint: Die Klasse aller Funktionen $f' + g'$ mit $f' \in O(f)$ und $g' \in O(g)$.
- Sei also $f' \in O(f)$ und $g' \in O(g)$.
- D.h. es ex. c_1, c_2, n_1 und n_2 mit:
  $f'(n) \leq c_1 \cdot f(n)$ für alle $n \geq n_1$ und
  $g'(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_2$.
- Setze $n_o = \max\{n_1, n_2\}$ und $c = c_1 + c_2$.
- Dann gilt offensichtlich: $f'(n) + g'(n) \leq c \cdot \max\{f(n), g(n)\}$ für alle $n \geq n_0$.
- Die Additionsregel ist relevant für die Hintereinanderausführung von Anweisungen in Programmen.

Motivation
Laufzeit von Algorithmen
O-Notation
Bestimmung der asymptotischen Laufzeit
Skalierbarkeit
Komplexitätstheorie
Quadratische Falle
Zusammenfassung

Die Multiplikationsregel

- Multiplikationsregel: $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$.
- Sei $f' \in O(f)$ und $g' \in O(g)$.
- D.h. es ex. c_1, c_2, n_1 und n_2 mit:
  $f'(n) \leq c_1 \cdot f(n)$ für alle $n \geq n_1$ und
  $g'(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_2$.
- Setze $n_o = \max\{n_1, n_2\}$ und $c = c_1 \cdot c_2$.
- Dann gilt offensichtlich: $f'(n) \cdot g'(n) \leq c \cdot f(n) \cdot g(n)$ für alle $n \geq n_0$.
- Die Multiplikationsregel ist relevant für die Ineinanderschachtelung von Schleifen in Programmen.

Beispiele

1. $2n^3 + 3n^2 + 10n + 2 = O(n^3)$ (betrachte $c = 17$ und $n_0 = 1$)
   Regel: Bei Polynomen dominieren die Terme mit dem höchsten Exponenten.
2. $\frac{n^3+n}{n^4-2} = O(n^{-1})$ (betrachte $c = 4$ und $n_0 = 2$)
3. $n^k = O(\mathrm{e}^n)$ für fixes k (wähle $c = k!$ und $n_0 \geq 0$).
   Denn $\frac{n^k}{k!} \leq \Sigma_{i=0}^{\infty} \frac{n^i}{i!} = \mathrm{e}^n$.
   Regel: Polynome werden durch die Exponentialfunktion dominiert.
4. $O(2^{1000}) = O(1)$: Alle konstanten Funktionen sind äquivalent.

Hierarchie von Größenordnungen

- $O(1)$: konstante Funktionen
- $O(\log n)$: logarithmische Funktionen
- $O(n)$: lineare Funktionen
- $O(n \log n)$: log-lineare Funktionen
- $O(n^2)$: quadratische Funktionen
- $O(n^k)$ für bel., festes $k \in \boldsymbol{N}$: polynomielle Funktionen
- $O(k^n)$: für bel., festes $k \in \boldsymbol{N}$: exponentielle Funktionen

4 Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Motivation

Laufzeit von Algorithmen

O-Notation

Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Skalierbarkeit

Komplexitätstheorie

Quadratische Falle

Zusammenfassung

Bestimmen der Größenordnung der Laufzeit für Programmstück *A*

- *A* ist einfache Zuweisung oder I/O-Anweisung: $O(1)$
- *A* ist eine Folge von Anweisungen oder Folge von Operationen: Additionsregel anwenden.
- *A* ist eine `if`-Anweisung:
  - „`if` *cond*`:` *B*“: Additionsregel für Laufzeit von *cond* und Laufzeit von *B*.
  - „`if` *cond*`:` *B*`; else:` *C*“: Maximum der Laufzeit von *B* und *C*. Dann Additionsregel für *cond* und das Maximum.
- *A* ist eine Schleife „`while` *cond*`:` *B*“. Bestimme Maximum der Laufzeit von *cond* und *B* innerhalb der Schleifenausführung. Multipliziere mit Anzahl der Schleifenausführungen.
- Wenn *A* `for`-Schleife ist, entsprechend.
- *A* ist Funktionsaufruf: Bestimme den Laufzeitaufwand für die aufgerufene Funktion.

Binäre Suche – noch einmal

UNI FREIBURG

```
def bin_search(el, sli):
  left, right = 0, len(sli) - 1
  while left <= right:
    mid = (left+right)//2
    if sli[mid] < el: left = mid + 1
    elif sli[mid] > el: right = mid - 1
    else: return True
  return False
```

- Der Aufwand innerhalb der Schleife ist konstant (unabhängig von der Größe von `sli`).
- Die Schleife wird $\lceil \log_2 n \rceil$ ausgeführt.
- Der Algorithmus hat eine Laufzeit von $O(\log n)$ (in der Größe der Liste) – er hat logarithmische Laufzeit.
- Achtung: Natürlich ist es auch korrekt zu sagen, der Algorithmus hat eine Laufzeit von $O(n^2)$
- …aber man gibt immer die kleinste obere Schranke an.

Motivation

Laufzeit von Algorithmen

O-Notation

Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Skalierbarkeit

Komplexitätstheorie

Quadratische Falle

Zusammenfassung

5 Skalierbarkeit

Motivation

Laufzeit von Algorithmen

O-Notation

Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Skalierbarkeit

Komplexitätstheorie

Quadratische Falle

Zusammenfassung

Skalierbarkeiten: Maximale Eingabelänge pro Zeiteinheit

Annahme: Ein Rechenschritt pro μsec. Dann folgt bei einer Laufzeit von $T(n)$ die maximale Eingabelänge für gegebene Rechenzeit:

$T(n)$	1 Sek.	1 Min.	1 Std.
n	1.000.000	60.000.000	3.600.000.000
$n \log_2 n$	62.746	2.801.417	133.378.058
n^2	1000	7.745	60.000
n^3	100	391	1.532
2^n	19	25	31

Hier sieht man, dass konstante Faktoren tatsächlich nicht so interessant sind.

Motivation

Laufzeit von Algorithmen

O-Notation

Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Skalierbarkeit

Komplexitätstheorie

Quadratische Falle

Zusammenfassung

Skalierbarkeiten: Technologiefortschritt

Motivation

Laufzeit von Algorithmen

O-Notation

Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Skalierbarkeit

Komplexitätstheorie

Quadratische Falle

Zusammenfassung

Annahme: Bisher war die maximale Eingabelänge p. Nach einem Technologiesprung um den Faktor 10 ergibt sich folgende maximale Eingabelänge:

$T(n)$	alt	neu ($10\times$ schneller)
n	p	$10p$
$n\log_2 n$	p	fast $10p$
n^2	p	$3.16p$
n^3	p	$2.15p$
2^n	p	$p+3.3$

Weitere Ressourcenmessungen & asymptotische Notationen

- Wir haben bisher nur die Zeit als wesentliche Ressource gemessen. Man kann aber auch:
  - den Verbrauch an Speicherplatz bestimmen,
  - den Kommunikationsaufwand (die Bandbreite) bestimmen.
- Es gibt außerdem weitere asymptotische Notationen, die aber in der Informatik weniger häufig auftauchen:
- $f = \Omega(g)$, wenn $g = O(f)$, wenn also f mindestens so schnell wächst wie g
- $f = \Theta(g)$, wenn f und g genauso schnell wachsen, wenn also $f = \Omega(g)$ und $f = O(g)$.
- $f = o(g)$, falls $g \neq 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, d.h. g wächst viel stärker als f.
- $f = \omega(g)$, falls $g = o(f)$.
- Bemerkung: In der Zahlentheorie wird die Notation auch benutzt, es ex. aber einige Unterschiede.

6 Komplexitätstheorie

Eine Stufe abstrakter: Komplexitätstheorie

- Bisher haben wir den Laufzeitbedarf (besser: Laufzeitwachstum) von Algorithmen untersucht.
- Man kann diese Frage aber eine Stufe abstrakter stellen und nach dem Laufzeitbedarf eines Problems fragen.
- Beispiel: Welches Laufzeitwachstum hat der beste Algorithmus für das Suchen eines Elements in einer sortierten Liste?

→ Hier quantifizieren wir über alle möglichen Algorithmen für das Problem!

- Das Gebiet der Komplexitätstheorie in der Theoretischen Informatik beschäftigt sich damit, Antworten auf solche Fragen zu finden.
- Das bekannte Milleniumsproblem, ob **P** = **NP** ist, entstammt diesem Gebiet.

Motivation
Laufzeit von Algorithmen
O-Notation
Bestimmung der asymptotischen Laufzeit
Skalierbarkeit
Komplexitätstheorie
Quadratische Falle
Zusammenfassung

NP-Vollständigkeit

- Es gibt eine Menge von algorithmischen Problemen, bei denen es einfach ist zu überprüfen, ob eine gegebene Struktur eine Lösung ist. Es ist aber kein Algorithmus bekannt, der schnell eine Lösung findet.
- Beispiel: Ist eine gegebene Boolesche Formel erfüllbar (SAT), d.h. gibt es eine Belegung der Booleschen Variablen, die die Formel wahr macht: $(a \vee b) \wedge (c \vee \neg a)$
- Bei gegebener Belegung $(a = 1, b = 0, c = 1)$ einfach überprüfbar. Eine erfüllende Belegung kann man (vermutlich nur) durch Ausprobieren finden.
- Solche Probleme kann man formal charakterisieren und bezeichnet sie als NP-vollständig.
- Wenn **P** = **NP**, dann kann man Lösungen in Polynomialzeit finden.
- Wenn **P** ≠ **NP**, wird man nie effiziente Algorithmen finden.

7 Quadratische Falle

Motivation

Laufzeit von Algorithmen

O-Notation

Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Skalierbarkeit

Komplexitätstheorie

Quadratische Falle

Zusammenfassung

Ausblick: Die quadratische Falle vermeiden

- Wir hatten gesehen, dass quadratische Laufzeiten dramatisch schlechter als lineare oder log-lineare Laufzeiten sind – speziell wenn die Eingaben etwas größer werden.
- Vermeide sie deshalb wenn möglich!
- Beispiel:
  - Es kommt ein Datenstrom mit monoton wachsenden Zahlen herein, der möglicherweise Doppelungen enthält.
  - Alle auftretenden Zahlen sollen in einer Liste aufsteigend gespeichert werden.
- Mögliche Lösung:

```
def record_data(newelement, li):
    if not newelement in li:
        li.append(newelment)
```

- Welche asymptotische Laufzeit ergibt sich bei *n* Aufrufen?
- Wie kann man es besser machen?

Motivation
Laufzeit von Algorithmen
O-Notation
Bestimmung der asymptotischen Laufzeit
Skalierbarkeit
Komplexitätstheorie
Quadratische Falle
Zusammenfassung

Nicht in die quadratische Falle gefallen!

- Die asymptotische Laufzeit for `record_data` ist $O(n^2)$, da der in-Test linear in der Länge der Liste ist.
- Bessere Lösung:

```
def record_data_fast(newelement, li):
    if newelement != li[-1]:
        li.append(newelment)
```

- Alternativ, wenn z.B. die Daten nicht monoton wachsen oder fallen, andere Datenstruktur benutzten.
- `dict` und `set` haben (erwartete) konstante Zugriffszeit!

8 Zusammenfassung

Motivation

Laufzeit von Algorithmen

O-Notation

Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Skalierbarkeit

Komplexitätstheorie

Quadratische Falle

Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Die abstrakte Laufzeit von Algorithmen auf einer Eingabe bestimmt man durch Zählen der *Basisoperationen*.
- für die Skalierbarkeit interessiert uns, wie schnell die Laufzeit mit der Größe der Eingabe (meist im schlechtesten Fall) wächst.
- Konstante Faktoren und endliche Anfangsstücke interessieren uns nicht.
- Landausche O-Notation!
- Unterscheide lineares, quadratisches, polynomielles und exponentielles Wachstum!
- Vermeide die quadratische Falle, die sich aus Basisoperationen mit nicht-konstanter Laufzeit ergeben!

Motivation

Laufzeit von Algorithmen

O-Notation

Bestimmung der asymptotischen Laufzeit

Skalierbarkeit

Komplexitätstheorie

Quadratische Falle

Zusammenfassung