

# Informatik I: Einführung in die Programmierung

## 8. Exkurs: Spieltheorie

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg



**UNI  
FREIBURG**

Bernhard Nebel

2. November 2015

# 1 Was ist Spieltheorie?



**UNI  
FREIBURG**

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Wiederholte  
strategische  
Spiele

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick

- Spieltheorie beschäftigt sich mit **Entscheidungen** von **rationalen Agenten** in **Gruppensituationen**:



- Gesellschaftsspiele
  - Entscheidungen in Politik und Wirtschaft
  - Auktionen
  - Wahlen
- Entstanden in der **Mathematik** (von Neumann 1928, Nash 1950).
  - Heute aber auch wichtiges Hilfsmittel in der Informatik:
    - Multi-Agenten-Systeme (und KI allgemein)
    - Internet-Routing (und theoretische Informatik allgemein)
    - Internet-Auktionen

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Wiederholte  
strategische  
Spiele

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick

# 2 Strategische Spiele



- Motivation
- Nutzenmatrix
- Beispiele
- Nash-Equilibrium

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Motivation

Nutzenmatrix

Beispiele

Nash-Equilibrium

Wiederholte  
strategische  
Spiele

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick

Spiele, bei denen alle Spieler **gleichzeitig** eine Entscheidung treffen und das Resultat sich aus der gleichzeitig getroffenen Entscheidung ergibt.

Beispiele:

- „Schere-Stein-Papier“,
- „Elfmeter-Schießen“,
- Auktion mit verdeckten Geboten,
- Wahlen

**Wichtig:** Jeder Spieler macht sich Gedanken darüber, wie die anderen wohl spielen würden um dann zu einer Entscheidung zu kommen. Dabei weiß jeder Spieler, dass die anderen genauso vorgehen.

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Motivation

Nutzenmatrix

Beispiele

Nash-Equilibrium

Wiederholte  
strategische  
Spiele

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick

- Jeder Agent entscheidet über eine auszuführende **Aktion** (Schere, Stein, ...)
- Der **Nutzen** (engl. *Utility*, *Payoff*) der Aktion ist abhängig von den Aktionen, die die anderen gewählt haben, wobei der Nutzen immer eine reelle Zahl ist:
  - Hat man selbst „Schere“ gewählt, so ist der Nutzen 1, falls der andere „Papier“ wählt.
  - Er ist 0, falls der andere auch „Schere“ wählt.
  - Er ist -1, falls der andere „Stein“ wählt.
- Rationale Agenten versuchen ihren **Nutzen zu maximieren** (und sonst nichts).

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Motivation

Nutzenmatrix

Beispiele

Nash-Equilibrium

Wiederholte  
strategische  
Spiele

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick

Man kann im Falle von 2 Spielern die Nutzenwerte in einer Matrix angeben.

		Spielerin 2	
		L	R
Spieler 1	T	$u_1, u_2$	$v_1, v_2$
	B	$x_1, x_2$	$y_1, y_2$

**Spieler 1** ist der Zeilenspieler, der zwischen den Aktionen **T** und **B** wählen kann. **Seine Nutzenwerte** sind die jeweils **linken Werte**. **Spielerin 2** ist die Spaltenspielerin. Sie kann hier zwischen den Aktionen **L** und **R** wählen. **Ihre Nutzenwerte** sind die jeweils **rechten Werte**.

Wählen die Spieler **T** und **R**, so ist die Auszahlung für **Spieler 1**  $v_1$  und für **Spielerin 2**  $v_2$ .

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Motivation

Nutzenmatrix

Beispiele

Nash-Equilibrium

Wiederholte strategische Spiele

Zusammenfassung & Ausblick

		Spieler 2 (Torwart)	
		L	R
Spieler 1 (Schütze)	L	-1, +1	+1, -1
	R	+1, -1	-1, +1

Wenn Spieler 1 (der Schütze) sich für **L** entscheidet und der Torwart für **L**, dann gibt es kein Tor und **Spieler 1** erhält **-1** und **Spieler 2** erhält **+1**. Entscheidet sich Spieler 1 für **R** und Spieler 2 für **L**, erhält **der Schütze +1** und der **Torwart -1**.

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Motivation

Nutzenmatrix

**Beispiele**

Nash-Equilibrium

Wiederholte strategische Spiele

Zusammenfassung & Ausblick



Ein Paar geht gerne ins Kino, er schaut gerne **Science-Fiction**-Filme, sie **Bollywood**-Filme. Sie gehen lieber zusammen ins Kino, als dass sie sich den Film alleine anschauen. Sie müssen allerdings ihre Kinokarten kaufen, ohne dass sie den anderen kontaktieren können (Handy kaputt).

		Spieler 2	
		B	S
Spieler 1	B	1, 2	0, 0
	S	0, 0	2, 1

Auch als **BoS**, „Bach or Strawinsky“ oder „Battle of Sexes“ bekannt.

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Motivation

Nutzenmatrix

Beispiele

Nash-Equilibrium

Wiederholte strategische Spiele

Zusammenfassung & Ausblick

# Beispiel: Gefangenendilemma



Zwei Verbrecher, die zusammen verhaftet wurden, werden einzeln verhört. Sie können mit 0-4 Jahren Gefängnis bestraft werden (Nutzenwert 4 für 0 Jahre, 3 für 1 Jahr, usw.). Wenn einer gesteht (**D**efect), während der andere schweigt (**C**ooperate), so wird ersterer frei gelassen (Wert: 4), während der andere 4 Jahre (Wert: 0) ins Gefängnis muss. Schweigen beide (**C/C**), müssen sie für 1 Jahr (Wert 3) ins Gefängnis. Gestehen beide, müssen sie beide für 3 Jahre (Wert 1) ins Gefängnis.

	C	D
C	3,3	0,4
D	4,0	1,1

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Motivation

Nutzenmatrix

Beispiele

Nash-Equilibrium

Wiederholte strategische Spiele

Zusammenfassung & Ausblick

- Welche Strategie sollte man spielen?
- **Maximin**: Das Maximum über alle Worst-Case-Werte.
  - Im Gefangenendilemma, ist der Worst-Case Wert 0 für C, 1 für D (für Spieler 1 hervorgehoben).
  - Für *BoS* und *Elfmeter* bekommen wir keine Lösung.
- **Dominante Strategien**: Ist eine Entscheidung immer besser, egal was der andere wählt, dann nimm diese.
  - Im Gefangenendilemma ist der Nutzen für **D immer höher** als für **C** (für Spieler 1 hervorgehoben).
  - Bei den anderen Spielen nicht vorhanden.

	C	D
C	3,3	0,4
D	4,0	1,1

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Motivation

Nutzenmatrix

Beispiele

Nash-Equilibrium

Wiederholte strategische Spiele

Zusammenfassung & Ausblick

- John Nash schlug vor, **Kombinationen von Aktionen** (*Aktionsprofile*) als Lösungen zu betrachten, bei denen sich kein Spieler durch eine Abweichung verbessern kann: **Nash-Equilibrium** (*NE*)
  - Im Gefangenendilemma, ist das einzige Nash-Equilibrium (**D,D**).
  - Bei BoS gibt es zwei Nash-Equilibria: (**B,B**), (**S,S**).
  - Im Elfmeterspiel gibt es kein Gleichgewicht.
  - Erweitert man die wählbaren Aktionen auf *Wahrscheinlichkeitsverteilungen* über den Aktionen, so gibt es (in endlichen strategischen Spielen) immer ein Nash-Equilibrium (**Satz von Nash**)!

	C	D
C	3,3	0,4
D	4,0	1,1

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Motivation

Nutzenmatrix

Beispiele

Nash-Equilibrium

Wiederholte strategische Spiele

Zusammenfassung & Ausblick

# 3 Wiederholte strategische Spiele



- Wiederholte Spiele mit unsicherem Abbruch
- Strategien = Moore-Automaten
- Alternative Nash-Equilibria
- Welche Strategie ist die Beste?

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

**Wiederholte  
strategische  
Spiele**

Wiederholte Spiele  
mit unsicherem  
Abbruch

Strategien =  
Moore-Automaten

Alternative  
Nash-Equilibria

Welche Strategie  
ist die Beste?

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick



- Wählt man die **Maximin**-Aktion um das schlechtest mögliche Ergebnis zu maximieren, erhält man D.
- Außerdem ist D eine **dominante** Aktion, da der Nutzen, egal was der andere Spieler macht, immer maximal ist.
- Außerdem ist (D,D) ein **Nash-Equilibrium**.
- Wünschenswert wäre aber natürlich für beide Spieler, dass (C,C) gespielt wird.
- Tatsächlich spielen Menschen auch oft (C,C):
  - weil sie **Erfahrungen** gesammelt haben,
  - weil sie **Vertrauen** in den anderen Spieler haben,
  - weil sie sich vor **Bestrafung** fürchten.

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Wiederholte  
strategische  
Spiele

Wiederholte Spiele  
mit unsicherem  
Abbruch

Strategien =  
Moore-Automaten

Alternative  
Nash-Equilibria  
Welche Strategie  
ist die Beste?

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick



- Um die Zeit- und Erfahrungsaspekte mit einzubringen, kann man die Spiele mehrfach spielen lassen.
- Also z.B. **10 Runden** des Gefangenendilemmas hintereinander spielen.
- Was wäre ein Nash-Equilibrium für dieses **neue Spiel**?
  - Im letzten Spiel ist das **einzige NE** das bekannte (D,D).
  - Dann ist allerdings im **vorletzten Spiel** auch (D,D) das einzige NE ...
- Wir könnten allerdings nach jeder Runde mit einer **Wahrscheinlichkeit  $p$  das Spiel beenden**, dann gibt es keine letzte Runde!
- Statt festen Nutzenwerten müssen wir jetzt den Erwartungswert des Nutzens (= **erwarteten Nutzen**) bestimmen.

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Wiederholte strategische Spiele

Wiederholte Spiele mit unsicherem Abbruch

Strategien = Moore-Automaten

Alternative Nash-Equilibria  
Welche Strategie ist die Beste?

Zusammenfassung & Ausblick



- Wir nehmen an, dass nach jeder Runde mit einer Wahrscheinlichkeit von  $0 < p < 1$  das Spiel beendet wird.
- Was ist der **Erwartungswert** für die Anzahl der Runden?
- $1p + 2(1 - p)p + 3(1 - p)^2p + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} ip(1 - p)^{i-1} = ?$
- Welchen **erwarteten Nutzen** erhält ein Spieler, wenn er in jeder Runde den konstanten Nutzen  $u$  bekommt?
- $u + u(1 - p) + u(1 - p)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} u(1 - p)^i = ?$
- Dazu müssen wir wissen, welchen Wert die **unendlichen Reihen**  $\sum_{i=1}^{\infty} ix^i$  und  $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$  (für  $|x| < 1$ ) haben.

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Wiederholte strategische Spiele

Wiederholte Spiele mit unsicherem Abbruch

Strategien = Moore-Automaten

Alternative Nash-Equilibria

Welche Strategie ist die Beste?

Zusammenfassung & Ausblick



# Zwei wichtige Reihen

Für  $0 < x < 1$ :

$$\begin{aligned} s &= 1 + x + x^2 + \dots \\ &= 1 + x(1 + x + x^2 + \dots) && (x \text{ ausgeklammert}) \\ &= 1 + xs && (s \text{ eingesetzt}) \end{aligned}$$

$$(1 - x)s = 1 \quad (-xs \text{ und } s \text{ ausgeklammert})$$

$$s = \frac{1}{(1-x)} \quad (\text{durch } (1-x) \text{ geteilt})$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{(1-x)}$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} ix^{i-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (\text{auf beiden Seiten differenzieren})$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (\text{mit } x \text{ multiplizieren})$$

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Wiederholte  
strategische  
Spiele

Wiederholte Spiele  
mit unsicherem  
Abbruch

Strategien =  
Moore-Automaten

Alternative  
Nash-Equilibria  
Welche Strategie  
ist die Beste?

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick

$\sum_{i=1}^{\infty} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$  angewandt auf die erwartete Spiellänge:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} ip(1-p)^{i-1} &= \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^i \\ &= \frac{p}{(1-p)} \cdot \frac{(1-p)}{(1-(1-p))^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)} \cdot \frac{(1-p)}{p^2} \\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$

Z.B. für  $p = 1/10$  ist die erwartete Spiellänge 10.

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Wiederholte  
strategische  
Spiele

Wiederholte Spiele  
mit unsicherem  
Abbruch

Strategien =  
Moore-Automaten

Alternative  
Nash-Equilibria

Welche Strategie  
ist die Beste?

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick

$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{(1-x)}$  angewandt auf den erwarteten Nutzen:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} u(1-p)^i &= u \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\ &= u \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= \frac{u}{p}\end{aligned}$$

Z.B. für  $p = 1/10$  und  $u = 4$  ist dann der erwartete Nutzen: 40.

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Wiederholte  
strategische  
Spiele

Wiederholte Spiele  
mit unsicherem  
Abbruch

Strategien =  
Moore-Automaten

Alternative  
Nash-Equilibria  
Welche Strategie  
ist die Beste?

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick



- Wie kann man bei wiederholten Spielen **Strategien** formulieren?
- Diese müssen **potentiell unendlich** sein.
- Endliche Automaten mit Ausgabe (= **Moore-Automaten**) wären da eine Möglichkeit:
  - *Unkooperativ*: Egal was der andere gespielt hat, spiele immer *D*.
  - *Kooperativ*: Egal was der andere gespielt hat, spiele immer *C*.
  - *Grimmig*: Spiele *C* bis der andere das erste Mal *D* spielt, dann spiele immer *D*.
  - *Tit-for-tat*: Spiele anfangs *C* und antworte dann auf jedes *D* mit *D* und auf *C* mit *C*.
  - *Bipolar/Troll*: Startend mit *D*, spiele abwechselnd *C* und *D*.

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Wiederholte  
strategische  
Spiele

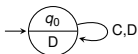
Wiederholte Spiele  
mit unsicherem  
Abbruch

Strategien =  
Moore-Automaten

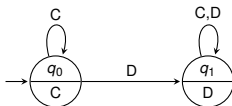
Alternative  
Nash-Equilibria  
Welche Strategie  
ist die Beste?

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick

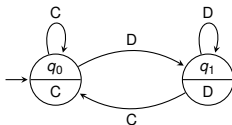
Unkooperativ



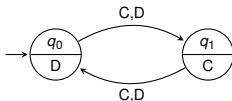
Grimmig



Tit-for-tat



Bipolar



Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Wiederholte  
strategische  
Spiele

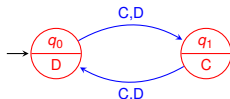
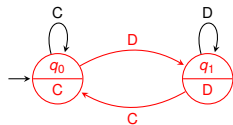
Wiederholte Spiele  
mit unsicherem  
Abbruch

Strategien =  
Moore-Automaten

Alternative  
Nash-Equilibria  
Welche Strategie  
ist die Beste?

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick

Spieler 1 spielt Tit-for-tat, Spielerin 2 spielt bipolar. 4 Runden.



Runde	Aktionen	Nutzen	Akkumuliert
1	(C,D)	(0,4)	(0,4)
2	(D,C)	(4,0)	(4,4)
3	(C,D)	(0,4)	(4,8)
4	(D,C)	(4,0)	(8,8)

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Wiederholte strategische Spiele

Wiederholte Spiele mit unsicherem Abbruch

Strategien = Moore-Automaten

Alternative Nash-Equilibria  
Welche Strategie ist die Beste?

Zusammenfassung & Ausblick

# Nash-Equilibria für das wiederholte Gefangenendilemma



- Die Kombination (**Unkooperativ, Unkooperativ**) ist ein **Nash-Equilibrium**:
  - Spielverlauf: (D,D), (D,D), ...
  - Erwarteter Nutzen:  $(1/p, 1/p)$
  - Kann ein Spieler sich durch Abweichung von der unkooperativen Strategie verbessern?
  - Weicht ein Spieler (z.B. Spieler 1) in einer Runde ab, so **verliert** er einen Nutzenpunkt.
- Aber es gibt jetzt auch **alternative NE**.
- Die Kombination (**Grimmig, Grimmig**) sieht sehr **viel versprechend** aus.
- Erwarteter Nutzen von (Grimmig, Grimmig) ist  $(3/p, 3/p)$ .
- Kann ein Spieler durch **Abweichung** seinen Nutzen steigern?

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Wiederholte strategische Spiele

Wiederholte Spiele mit unsicherem Abbruch

Strategien = Moore-Automaten

**Alternative Nash-Equilibria**

Welche Strategie ist die Beste?

Zusammenfassung & Ausblick

# Ist eine Abweichung von (Grimmig, Grimmig) sinnvoll?



- Die Strategiekombination (Grimmig, Grimmig) führt zu dem **Spielverlauf**  $(C, C), (C, C), (C, C), \dots$
- Kann Spielerin 2 abweichen um einen **höheren Nutzenwert** zu erhalten?
- Wenn sie in der Runde  $k$  auf  $D$  abweicht, muss sie danach immer  $D$  spielen, ansonsten verschenkt sie Punkte.
- Wie hoch ist die **erwartete Nutzensteigerung** ab Schritt  $k$ ?

$$\begin{aligned} + 1 - 2 \cdot (1 - p) - 2 \cdot (1 - p)^2 - \dots &= 1 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (1 - p)^i \\ &= 3 - 2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1 - p)^i \\ &= 3 - 2 \cdot \frac{1}{1 - (1 - p)} \\ &= 3 - \frac{2}{p} \end{aligned}$$

- Falls  $p = \frac{2}{3}$  oder kleiner ist, gibt es **keinen Nutzenzuwachs**.
- $(\text{Grimmig}, \text{Grimmig})$  ist damit ein **NE** für  $p \leq \frac{2}{3}$ .

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Wiederholte strategische Spiele

Wiederholte Spiele mit unsicherem Abbruch

Strategien = Moore-Automaten

Alternative Nash-Equilibria  
Welche Strategie ist die Beste?

Zusammenfassung & Ausblick



# Tit-for-tat führt auch zu einem Nash-Equilibrium



- Spielverlauf für (Tit-for-tat, Tit-for-tat) genauso wie für (Grimmig, Grimmig).
- Wir betrachten den Fall, dass ein Spieler in der Runde  $k$  einmal nach  $D$  wechselt und danach wieder  $C$  spielt.
- Nutzensteigerung im Schritt  $k$ :

$$+1 - 2(1 - p) = 2p - 1$$

- D.h. für alle  $p \leq 1/2$  gibt es keine Nutzensteigerung.
- Wird öfter als einmal bei  $p \leq 1/2$  abgewichen, kann es keine Nutzensteigerung geben.
- D.h. auch (Tit-for-tat, Tit-for-tat) ist ein Nash-Equilibrium – so lange die Abbruchwahrscheinlichkeit klein genug ist.

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Wiederholte strategische Spiele

Wiederholte Spiele mit unsicherem Abbruch

Strategien = Moore-Automaten

Alternative Nash-Equilibria

Welche Strategie ist die Beste?

Zusammenfassung & Ausblick

- Die **unkooperative Strategie** ist weder dominante Strategie noch ist sie die einzige Equilibriumsstrategie.
- D.h. es gibt **rationale Kooperationsstrategien** (mit höheren Auszahlungen).
- Allerdings gibt es **sehr viele** NEs!
- Welche Strategie sollte man spielen?
- Das kann man ja auch empirisch bestimmen: Sie dürfen ihre eigenen Strategien entwerfen, die dann gegeneinander im **Wettkampf** antreten um möglichst hohe Auszahlungen zu erhalten.
- Wie man einen Moore-Automat als Python-Programm realisiert, haben wir ja bereits gesehen.

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Wiederholte  
strategische  
Spiele

Wiederholte Spiele  
mit unsicherem  
Abbruch

Strategien =  
Moore-Automaten

Alternative  
Nash-Equilibria

Welche Strategie  
ist die Beste?

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick



- **Strenges Tit-for-tat:** Bestrafe 2- oder 3-mal, bevor zur Kooperation zurück gekehrt wird.
- **Missvertrauen:** Beginne mit D und spiele dann Tit-for-tat.
- **Majorität:** Spiele den meistbenutzten Zug des Gegners (bei Gleichheit Kooperation).
- **Schnorrer:** Probiere irgendwann D und mache weiter damit, solange der andere C spielt, ansonsten Tit-for-Tat.
- **Spätes Abweichen:** Weiche in einer sehr späten Runde ab und spiele D (in der Hoffnung, dass das die letzte Runde ist).
- Einige dieser Strategien sind NE, andere nicht. Aber darauf kommt es ja gar nicht an, wenn man gegen viele verschiedene Agenten spielen muss . . .

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Wiederholte  
strategische  
Spiele

Wiederholte Spiele  
mit unsicherem  
Abbruch

Strategien =  
Moore-Automaten

Alternative  
Nash-Equilibria

Welche Strategie  
ist die Beste?

Zusammen-  
fassung &  
Ausblick

# 4 Zusammenfassung & Ausblick



**UNI  
FREIBURG**

Was ist  
Spieltheorie?

Strategische  
Spiele

Wiederholte  
strategische  
Spiele

**Zusammen-  
fassung &  
Ausblick**



- **Spieltheorie** beschäftigt sich mit Entscheidungen von rationalen Agenten in Gruppen.
- Spieltheorie ist in der Mathematik entstanden, ist mittlerweile aber ein **wichtiges Werkzeug innerhalb der Informatik**.
- **Strategische Spiele** sind die einfachsten Spiele, die untersucht werden.
- Das **Gefangenendilemma** modelliert das Problem, dass Kooperation zwar sinnvoll ist, aber unkooperatives Verhalten höheren Nutzen bringen kann.
- Wiederholte Spiele bringen den Aspekt von **Zeit** und **Erfahrungen** in die spieltheoretische Analyse.
- Im **wiederholten Gefangenendilemma** existieren **rationale Kooperationsstrategien**, aber es existieren sehr viele davon.

Was ist Spieltheorie?

Strategische Spiele

Wiederholte strategische Spiele

Zusammenfassung & Ausblick