SUBSET-SUM

<u>Gegeben</u>: $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ und eine Zahl $b \in \mathbb{N}$.

Gefragt: Gibt es $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = b$?

Dynamic-Programming-Algorithmus für SUBSET-SUM
Baue Tabelle $T[i,j]$ auf:

$T[i,j]$ = wahr <u>gdw.</u> es ex. Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, i\}$
mit $\sum_{i \in I} a_i = j$

Lösung ist "ja" gdw. $T[\underline{\underline{k}}, \underline{\underline{b}}]$ wahr ist.

$\underline{T[i,j]} = \underline{(a_i = j)} \vee \underline{T[i-1, j] = \text{wahr}} \vee \underline{T[i-1, j-a_i] = \text{wahr}}$

Bsp $a_1 = 5$ $a_2 = 8$ $a_3 = 10$ $a_4 = 6$ $a_5 = 1$ $a_6 = 3$ $b = 17$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	T		T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
5	T				T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
4					T	T		T		T	T		T	T	T	T	
3					T			T		T			T		T		
2					T			T					T				
1					T												

$O(b \cdot n)$ $\log b$

Dies ist ein pseudopolynomialen Algorithmus:

Ein Alg. der poly. Laufzeit hat, falls alle Zahle unär dargestellt werden.

Jenseits von NP

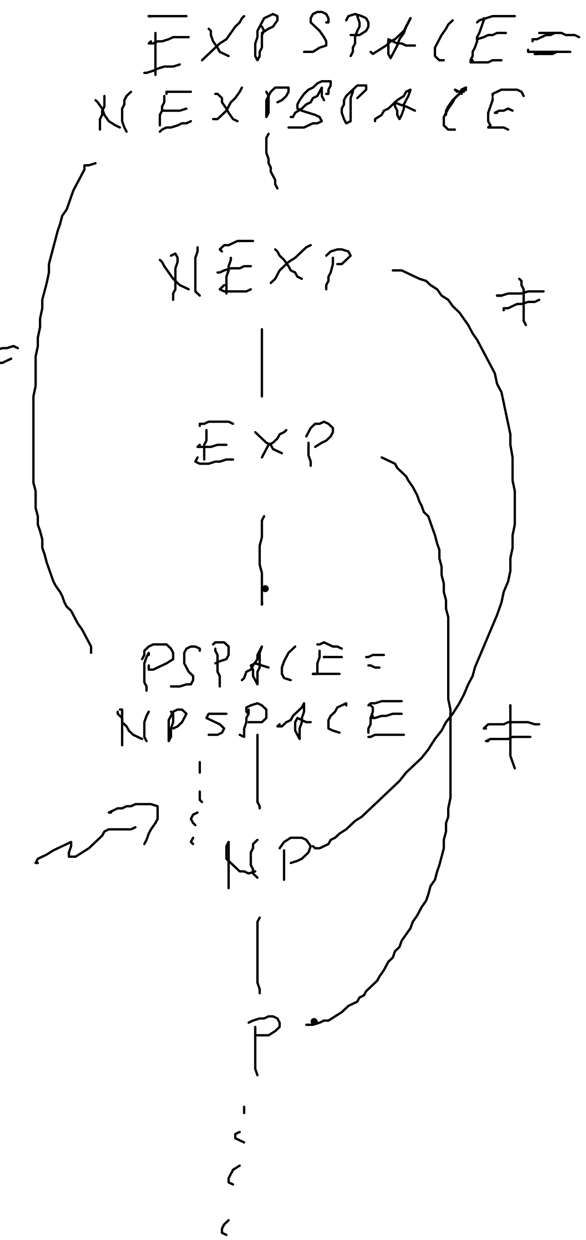
$$PSPACE = \bigcup_{p \text{ Polynom}} SPACE(p(n))$$

$$NPSPACE = \bigcup_{p \text{ Polynom}} NSPACE(p(n))$$

$$EXP = \bigcup_{p \text{ Polynome}} TIME(2^{p(n)})$$

$$NEXP = \bigcup_{p \text{ Polynom}} NTIME(2^{p(n)})$$

$$EXSPACE = \bigcup_{p \text{ Polynom}} SPACE(2^{p(n)})$$



Abduktion ~ Diagnose

Sherlock Holmes

Hat man das Unmögliche eliminiert, muss das was bleibt die Lösung, ...

Charles Peirce

Die überraschende Tatsache C wird beobachtet; aber wenn A wahr wäre, würde C eine Selbstverständlichkeit sein; folglich besteht Grund zu vermuten, dass A wahr ist.

Abduktionsproblem (ABP)

Gegeben: Zwei aussagenlogische Formeln W und B, eine Menge von aussagenlogischen Var. A und eine Zahl k.

Gefragt: Gibt es eine Menge $\underline{A'} \subseteq A$ mit $|A'| \leq k$ und $\underline{\bigwedge_{p \in A'} p \wedge W \text{ ist erfüllbar}}$ und

$\underline{\bigwedge_{p \in A'} p \wedge W \rightarrow B \text{ ist allgemeingültig}}$?

Aussage: ABP ist NP-hart und co-NP-hart.

$SAT \leq_p ABP$: Setze $W = F$, $B = T$, $A = \emptyset$, $k = 0$.

F ist erfüllbar gdw. W erfüllbar ist und $W \rightarrow B$ ist allg.gültig,

gdw W erfüllbar ~~und $W \rightarrow T$~~

UNSAT $\leq_p$ ABP

$W = T$, $B = \neg F$, $A = \emptyset$, $k = 0$

F unerfüllbar <u>gdw.</u> B allgemeingültig

<u>gdw.</u> W erfüllbar und $T \Rightarrow B$ allgemeingültig $\square$

ABP könnte auf einer NDTM in polynomieller Zeit entschieden werden, wenn SAT in vernachlässigbarer Zeit entschieden werden könnte:

Nicht-det. Alg für ABP:

Rate $A' \subseteq A$

Verifiziere:

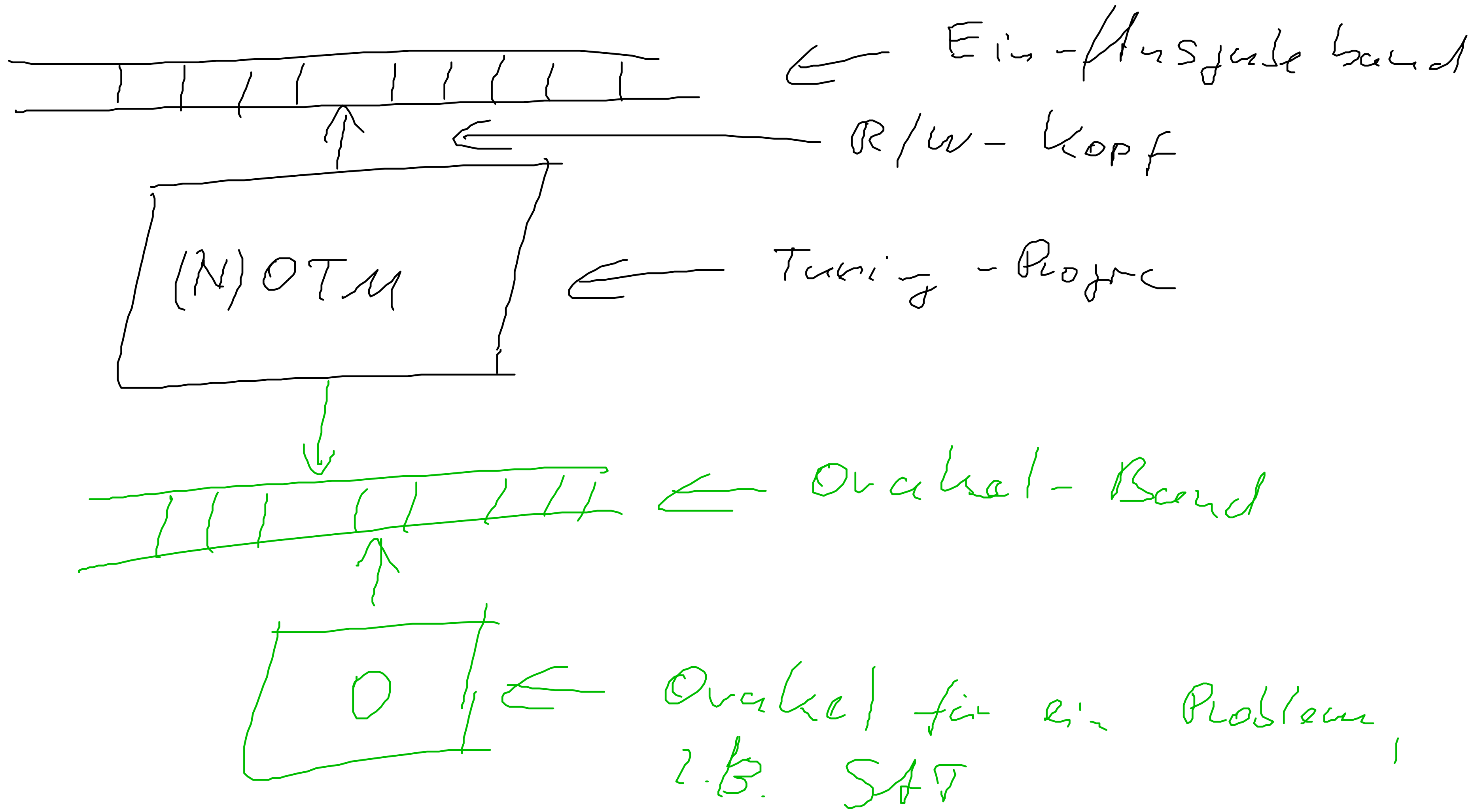
1) $|A'| \leq k$

2) $\bigwedge_{p \in A} p \wedge W$ ist erfüllbar

SAT muss entschieden

3) $\neg(\bigwedge_{p \in A} p \wedge W \Rightarrow B)$ ist unerfüllbar

Orakel-Turingmaschinen ((N)OTM)



Die OTM darf beliebig viele Anfragen an das Orakel stellen:

- Instanz auf das Orakelband schreiben
- Orakel gibt dann "1" oder "0" zurück nach konstanter Zeit

Def. Orakelklassen

$P^{NP} = \{ L \mid L$ kann auf det. OTM mit einem Orakel $O \in NP$ in poly. Zeit entschieden werden $\}$

$NP^{NP} = \{ L \mid L$ kann auf NOTM mit einem Orakel $O \in NP$ in poly Zeit entschieden werden $\}$

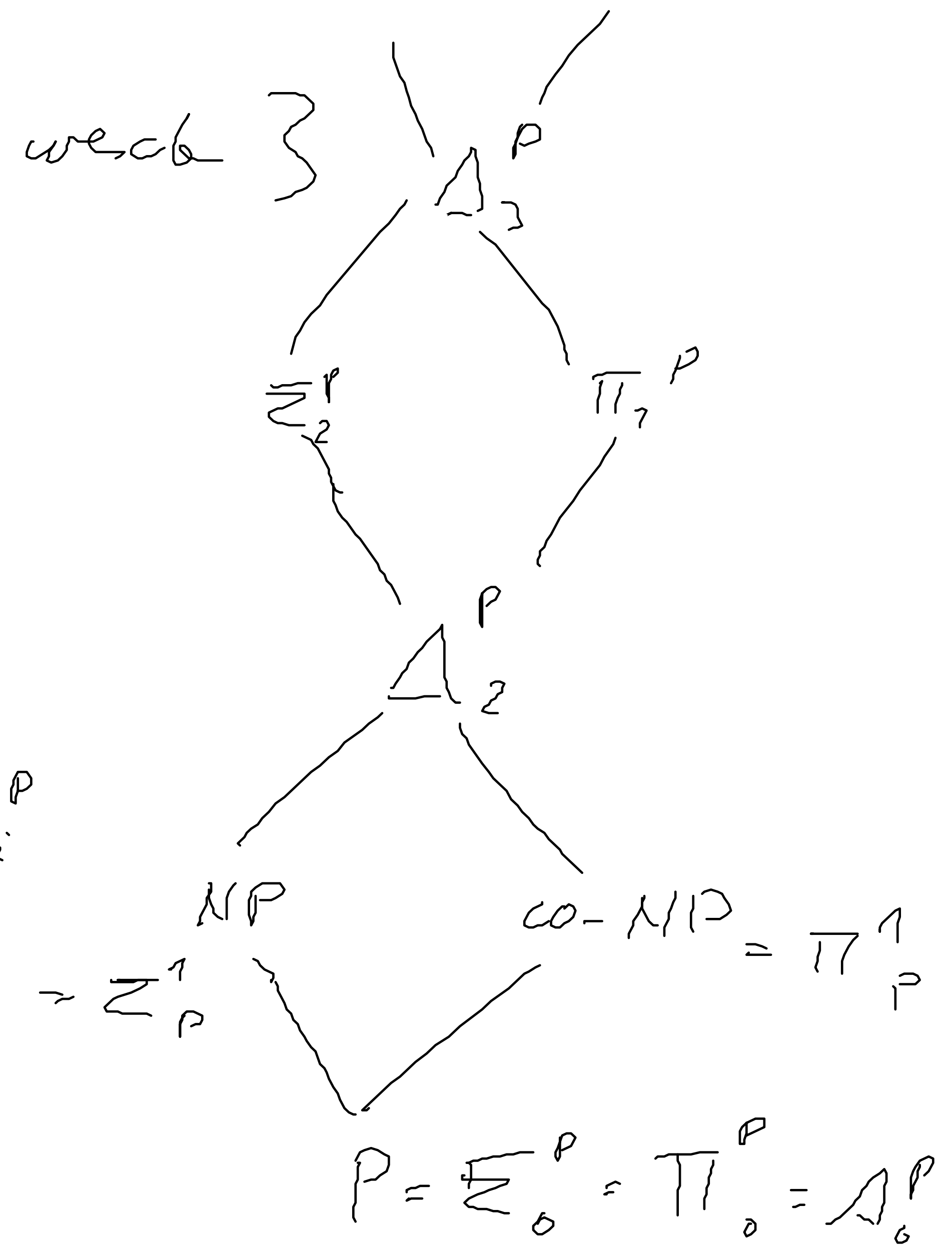
$ABP \in NP^{NP}$

Def Polynomiale Hierarchie

$$\Sigma_0^P = \Pi_0^P = \Delta_0^P = P$$

$$\Sigma_{i+1}^P = NP^{\Sigma_i^P} \qquad \Pi_{i+1}^P = co\text{-}NP^{\Sigma_i^P}$$

$$\Delta_{i+1}^P = P^{\Sigma_i^P}$$



Für alle Stufen gibt es vollständige Probleme

k - ∃QBF

Gegeben: $\underbrace{\exists x_{11} x_{12} \dots x_{1l_1} \forall x_{21} x_{22} \dots x_{2l_2} \exists \dots}_{k \text{ Quantoren, die sich abwechseln}} F$

Gefragt: Wird die quantifizierte Formel wahr?

k - ∃QBF sind Σ_k^P - vollständig.

$PH = \bigcup_k \Sigma_k^P$ polynomiale Hierarchie

PH: Hat vollständige Probleme