

- jede TM M kann als Wort über dem Alphabet $\{0,1\}$ kodiert.
- jedes Wort über $\{0,1\}$ kann als TM aufgefasst werden:

$$M_w = \begin{cases} M, & \text{falls } \text{code}(M) = w \\ \hat{M}, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\hat{M}$ eine beliebige fixe TM ist.

Allgemeines Halteproblem:

$$H = \{ x \# y \mid M_x \text{ hält auf der Eingabe } y \}$$

Die TM stoppt, d.h. eine Endkonfiguration (= enthält Endzustand)

Halteproblem auf leerem Band

$$E = \{ w \mid M_w \text{ hält auf der leeren Eingabe} \}$$

Wenn E entscheidbar wäre, dann wäre BB berechenbar!

D.h. E kann nicht entscheidbar sein.

Daraus folgt, dass auch H unentscheidbar zu mass.

Wir beweisen es alternativ lehrbuchmäßig:

Das spezielle Halteproblem:

$$K = \{ w \mid M_w \text{ angewendet auf die Eingabe } w \text{ hält} \}$$

Satz Das spezielle Halteproblem ist unentscheidbar.

Bew: Angenommen K sei entscheidbar, d.h. K ist mit Hilfe einer TM M berechenbar.

Konstruiere M' :



M' stoppt mit "u" w falls M mit 0 stoppt
 M' geht in Endlosschleife falls M mit 1 stoppt.

$$\text{code}(M') = w' \Rightarrow M_{w'} = M'$$

M' angesetzt auf w' hält

gdw M angesetzt w' hält mit
Ausgabe 0

$$\text{gdw } \chi_k(w') = 0$$

$$\text{gdw } w' \notin L$$

gdw $M_{w'}$ angesetzt auf w'
hält nicht

gdw M' angesetzt auf w'
hält nicht

Widerspruch.

D.h. die Annahme, dass χ_k berechenbar ist, muss
falsch sein. D.h. L ist unentscheidbar. $\square$

Alternativer Beweis:

Wir zählen alle Werte w_i über $\{0, 1\}$ auf.

Wir zählen alle TMS auf, in den wir M_{w_i} für alle w_i 's betrachte.

Wir stellen eine Matrix auf

wert ↓	TMS →					
	M_{w_1}	M_{w_2}	...	M_{w_i}	...	M_{w_j}
w_1	1	1	...	0	...	1
w_2	0	1	...	1	...	0
...	...	...	...	...	...	...
w_i	1	0	...	0	...	1
...	...	...	...	...	...	...
w_j	0	1	...	1	...	1

Bsp:

$w_i \in D$

$w_j \notin D$

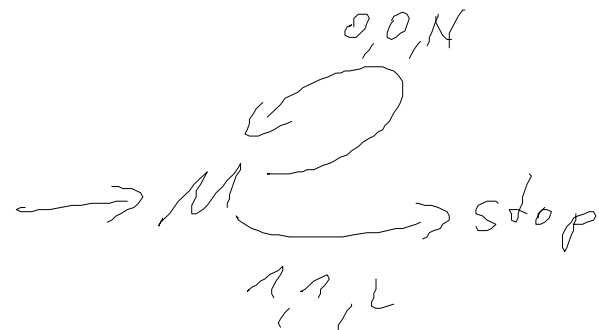
Wir legen an der Stelle (i, j) eine 1 an, falls M_{w_i} auf w_j hält, sonst 0

Wir betrachten $D = \{w_i \mid M_{w_i} \text{ nicht auf } w_i \text{ hält}\}$

D.h. D enthält alle Worte w_i , bei denen beim Eing. (i, i) eine Nullstelle.

Wir nehmen an, D sei entscheidbar mit einer TM M .

Modifiziere M zu M' :



Wenn M ex., dann ex. auch M' .

Wenn M' ex., dann gibt es ein Wort w_i mit $M' = M_{w_i}$.

$w_i \notin D \Rightarrow M_{w_i}$ hält auf w_i (laut Def von D)

$w_i \notin D \Rightarrow M' (= M_{w_i})$ hält nicht auf w_i (laut Konstr. von M')

$\Rightarrow$ Widerspruch

$w_i \in D \Rightarrow M_{w_i}$ hält nicht auf w_i (laut Def D)

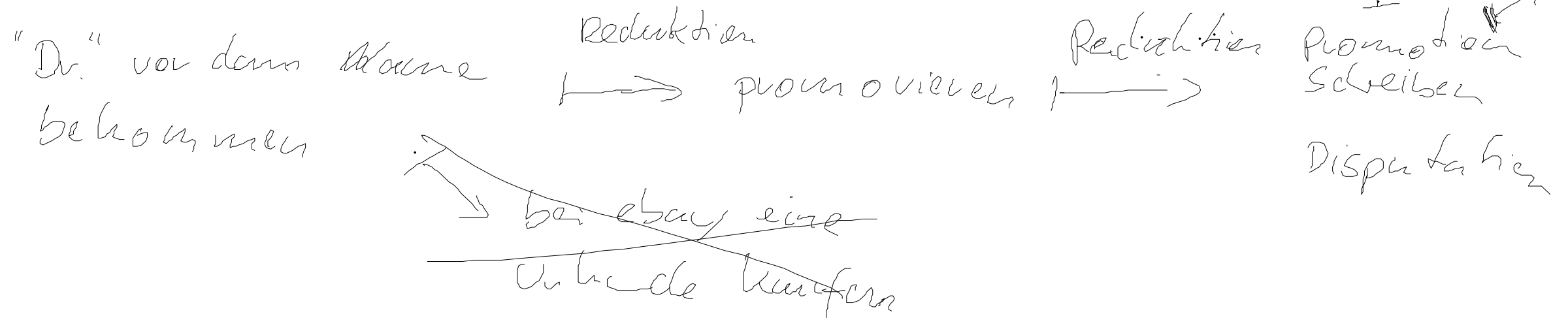
$w_i \in D \Rightarrow M' (= M_{w_i})$ hält auf w_i mit "1"

$\Rightarrow$ Widerspruch

□

Reduktionen

~~aus dem Internet kopierte Fädel~~



Def Seien $A \in \Sigma^*$ und $B \in \Sigma^*$
Sprachen/Probleme. Dann ist A auf B
reduzierbar, falls es eine totale
und berechenbare Fkt. $f: \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$
gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$:

$$x \in A \iff f(x) \in B$$

Intuition: um können A entscheiden, indem wir
eine Instanz übersetzen mit f und ein Entscheidungsverfahren für B nutzen.

Notation: Wenn A auf B reduzierbar ist,
schreibt man $A \leq B$.

Intuition: B ist mindestens so schwierig, wie A .

Lemma Falls $A \leq B$ und B entscheidbar (semi-entscheidbar)
ist, dann ist auch A entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar).

Bew: Es gelte $A \leq B$ mittels f . Dann gilt

$$\chi_A^1(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ \underset{\text{undef.}}{0}, & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & \underline{f(x) \in B} \\ \underset{\text{undef.}}{0}, & \underline{f(x) \notin B} \end{cases} = \underline{\chi_B^1(f(x))}$$

Da χ_B berechenbar und f total und berechenbar, kann
auch die Komposition $f \circ \chi_B$ berechenbar. D.h.,
wir haben ein Entscheidungsverfahren für A .

Entsprechend für Semi-Entscheidbarkeit.

Lemma

Falls $A \in B$ und A unentscheidbar, dann ist auch B unentscheidbar.

Bew.

Sei $A \in B$ und A unentscheidbar. Angenommen B wäre entscheidbar, dann müsste auch A entscheidbar sein. Widerspruch.

□

Satz

H ist nicht entscheidbar.

Bew.

Wir zeigen $K \in H$. Wähle $f(w) = \underline{w \# w}$.

Dann gilt $w \in K \Leftrightarrow w \# w \in H$.

D.h. f ist eine Reduktion. D.h. H muss unentscheidbar sein.

Satz

Das Halteproblem auf leeren Band E ist unentscheidbar.

Bew.

Es genügt $H \in E$ zu zeigen.

Jedem Wort $x \# y$ ordnen wir eine TM $M^{x \# y}$ zu:

1) $M^{x \# y}$ schreibt y auf das leere Eingabeband

2) Dann verhält sich diese Maschine wie M_x

[Auf nicht leeren Band interessiert das Verhalten nicht]

Die Reduktion ist dann

$$f(x \# y) = \text{code}(M^{x \# y})$$

$x \# y \in H$ gdn M_x angesetzt auf y hält
gdn $M^{x \# y}$ angesetzt aufs leere Band hält
gdn $f(x \# y) \in E$

Offensichtlich ist f total und berechenbar.

D.h. f ist eine Reduktion von H auf E .

D.h. auch E ist unentscheidbar.

□

Satz von Rice

Sei R die Klasse aller Turing-berechenbare Funktionen.

Sei $S \subseteq R$ mit $S \neq \emptyset$ und $S \neq R$. Dann ist

$$C(S) = \{w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete Fkt. liegt in } S\}$$

unentscheidbar.

Intuition: Jede nicht-triviale Eigenschaft von TMs ist unentscheidbar.

Trivial: M berechnet eine berechenbare Fkt. ($S = R$)

M berechnet eine nicht-berechenbare Fkt. ($S = \emptyset$)

Nicht-triviale Eigenschaften:

M berechnet eine totale Fkt.

M berechnet alle Funktionen, die mit einer TM mit höchstens 5 Zuständen berechnet werden können.

Hat diese TM 5 Zustände?