Satz Jede TB Fkt. ist GB.

Bew.: Gegeben TM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_1, \square, E)$ zur Berechnung von Fkt. f.

Wir simulieren die Turing-Maschine durch ein GOTO-Programm:

$M_1 : P_1;$
$M_2 : P_2;$
$M_3 : P_3$

P_1 transformiert die Eingabewerte in eine interne $\boxed{\text{Banddarstellung}}$, d.h. für die Parameter $x_1, \dots, x_k$ wird $\square\, bin(x_1) \# \dots \# bin(x_k) \square$.

P_3 Enkodiert die Banddarstellung und speichert das Resultat in x_0

Banddarstellung

Seien $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ und $\Gamma = \{a_1, \dots, a_m\}$. Sei $\underline{b > |\Gamma|}$

Repräsentiere TM-Konf. $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_p} z_\ell\, \underline{a_{j_1}} a_{j_2} \dots a_{j_q}$

durch 3 Variable:

$$x = (i_1 i_2 \dots i_p)_b = \sum_{\mu=1}^{p} i_\mu \cdot b^{p-\mu}$$

$$y = (j_q \dots j_2 j_1)_b = \sum_{\mu=1}^{q} j_\mu \cdot b^{\mu-1}$$

$$z = \ell$$

Bsp $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ $\Gamma = \{a_1, a_2\}$ $b = 3$

$a_1 a_2 a_1 z_3 a_1 a_1 a_2$

$x = 121_3 = 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 = 16_{10}$

$y = 211_3 = 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 = 22_{10}$

$z = 3$

"$M_1 : P_2$" ist dann

```
M_2 :  a := y MOD b;
       IF (z=1) AND (a=1) THEN GOTO M_11;
       IF (z=1) AND (a=2) THEN GOTO M_12;
         :
       IF (z=k) AND (a=m) THEN GOTO M_km;

M_11 : P_11; GOTO M_2;
M_12 : P_12; GOTO M_2;
  :
M_km : P_km; GOTO M_2;
```

P_{ij} ist für $\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, \underline{L})$

```
z := i'
y := y DIV b;
y := b*y + j';
y := (x MOD b) + b*y;
x := x DIV b;
```

Andere Fälle analog.

$\square$

2.4 Primitiv und μ-rekursive Funktionen

Basisfkt:

- Konstante Funktion $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $f(n_1, \dots, n_k) = c$
- Projektionen $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $\pi_i^k(n_1, \dots, n_i, \dots, n_k) = n_i$
- Nachfolgefkt $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $s(n) = n+1$

Konstruktion:

- Funktions-komposition $g: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ und m Fkt. $h_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ $i \in \{1, \dots, m\}$, dann entsteht eine neue Fkt $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch Komposition

$$f(n_1, \dots, n_k) = \underline{g(h_1(n_1, \dots, n_k), \dots, h_m(n_1, \dots, n_k))}$$

- Primitive Rekursion
  Gegeben $g: \mathbb{N}^{k-1} \to \mathbb{N}$ und $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ dann entsteht durch primitive Rekursion $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

$$f(0, n_2, \dots, n_k) = g(n_2, \dots, n_k)$$

$$f(n+1, n_2, \dots, n_k) = \underline{h(f(n, n_2, \dots, n_k), n, n_2, \dots, n_k)}$$

Gegeben $id: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad id(n) = n$
$S_3 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} \quad S_3(n_1, n_2, n_3) = n_1 + 1$

Neue Fkt. $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$p(0, x) = id(x)$$

$$p(n+1, x) = S_3(p(n,x), n, x) = p(n,x) + 1$$

$$p \equiv add$$

Def. Die Klasse der primitiv rekursiven Fkt. ist

induktiv definiert:

1. Alle konstante Fkt. sind pr.
2. Alle Projektionen sind pr.
3. Die Nachfolgefkt ist pr.
4. Alle Fkt., die durch Komposition von pr. Fkt. entstehen sind pr.
5. Alle Fkt., die durch primitive Rekursion aus pr. Fkt. entstehen sind pr.

Bsp: add ist pr. $id(x) = \pi_1^1(x)$, $S_3(n_1, n_2, n_3) = S(\pi_1^3(n_1, n_2, n_3))$

Bem: Vertauschung von Argumenten oder Identifikation von Argumenten sind immer zulässig

Bsp $f : \mathbb{N}^5 \to \mathbb{N}$ und wir wollen $g : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ def.:

$$g(a, b, c, d) = f(b, b, c, a, c)$$

$$\underline{g(a, b, c, d) = f(\pi^4_2(a, b, c, d), \pi^4_2(a, b, c, d), \pi^4_3(a, b, c, d),}$$
$$\underline{\pi^4_1(a, b, c, d), \pi^4_3(a, b, c, d))}$$

Bsp: mult : $\underline{\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}}$ mit $\text{mult}(a, b) = a * b$

$$\text{mult}(0, x) = \underline{0}$$
$$\text{mult}(n+1, x) = \underline{a(\text{mult}(n, x), n, x)} = \underline{\text{add}(\text{mult}(n, x), x)}$$

$$\underline{a(n_1, n_2, n_3)} = \text{add}(\pi^3_1(n_1, n_2, n_3), \pi^3_3(n_1, n_2, n_3))$$
$$= \text{add}(n_1, n_3)$$

Bem: Alle pr. Fkt. sind total und berechenbar.

Einige primitiv rekursive Fkt.:

$v(n) = \max(n-1, 0)$ ist pr.

$v(0) = 0$

$v(n+1) = n$

Damit ist die modifizierte Subtraktion pr.

$sub(x, y) = \max(x - y, 0)$

$sub(x, 0) = x$

$sub(x, y+1) = v(sub(x, y))$

$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ ist pr.

$\binom{0}{2} = 0$

$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n$

$c(x,y) = \binom{x+y+1}{2} + x$ ist deshalb auch pr.

<u>Bem.</u> c ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^2$

$x \rightarrow$, $y \downarrow$

$y \backslash x$	0	1	2	3
0	0	2	5	9
1	1	4	8	
2	3	7		
3	6			

$\rightarrow$ d.h. wir können Paare von nat. Zahlen durch eine einzige Zahl darstellen!

$$c^{k+1}(n_0, \dots, n_k) = c\left(n_0, c\left(n_1, c(\dots\ c(\underline{n_k,} 0) \dots) \dots\right) \dots\right)$$

Umkehrfkt.:

$$e(c(x,y)) = x \qquad f(c(x,y)) = y$$

und es gilt dann $\quad c(e(n), f(n)) = n$

Für c^{k+1} def die Umkehrfkt. $d_i \quad i = 0, \dots, k$

$$d_0(n) = e(n)$$

$$d_1(n) = e(f(n))$$

$$d_2(n) = e(f(f(n)))$$

$$\vdots$$

$$d_k(n) = e(\underbrace{f(f \dots f(}_{k\text{-mal}}n) \dots))$$

Sind e und f primitiv rekursiv?

Notation: Sei P( ) ein logisches Prädikat. Wir identifizieren jetzt das Prädikat mit seiner charakteristische Fkt.

$$\chi_P(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } P(x) \text{ wahr ist} \\ 0, & \text{falls } P(x) \text{ falsch ist} \end{cases}$$

Def Gegeben ein 1-stelliges Prädikat P, so ist der <u>beschränkte</u> <u>max. Operator</u> def. wie folgt

$$\underline{\max_n \{x \le n \mid P(x)\}} \quad \text{mit } \max \emptyset = 0$$

Der <u>beschränkte max-Op</u> ist pr., wenn das <u>Prädikat pr.</u> ist:

$$q(0) = 0$$

$$q(n+1) = \begin{cases} n+1, & \text{falls } P(n+1) \text{ wahr ist} \\ q(n), & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= q(n) + P(n+1) * (n+1 - q(n))$$

Def $\exists x \le n\ P(x)$ ist der beschränkte Existenz-Op.
Formel wird wahr wenn es ein $x \le n$ gibt, so dass $P(x)$ wahr wird.

Bem $Q(n) \equiv \exists x \le n \quad P(x)$ ist pr.

Damit gilt dann, dass e und f pr sind:

$$e'(n,m,k) = \max_n \{ x \leq n \mid \exists y \leq k : c(x,y) = m \}$$

$$\underline{e(n)} = e'(n,n,n)$$

$$f'(n,m,k) = \max_n \{ y \leq n \mid \exists x \leq k, \; c(x,y) = m \}$$

$$\underline{f(n)} = f'(n,n,n).$$

<u>Satz</u> Die Klasse der LB Fkt. ist genau die Klasse der pr. Fkt.

$\Leftarrow$: 1) Basisfkt. sind offensichtlich LB.

2) Komposition: LOOP-Prog., das die Parameter werte berechnet und dann g aufrufen

3) Falls f durch prim Rek. entsteht:

$$f(0, n_2, \ldots, n_k) = g(n_2, \ldots, n_k)$$
$$f(n+1, n_2, \ldots, n_k) = h(f(n, n_2, \ldots, n_k), n, n_2, \ldots, n_k)$$

Konstr. LOOP-Prog.

$y := g(n_2, \dots, n_k)$;

$x := 0$;

LOOP n DO

$y := h(y, x, n_2, \dots, n_k)$;

$x := x + 1$

END;

$x_0 = y$

$\Rightarrow$

LT