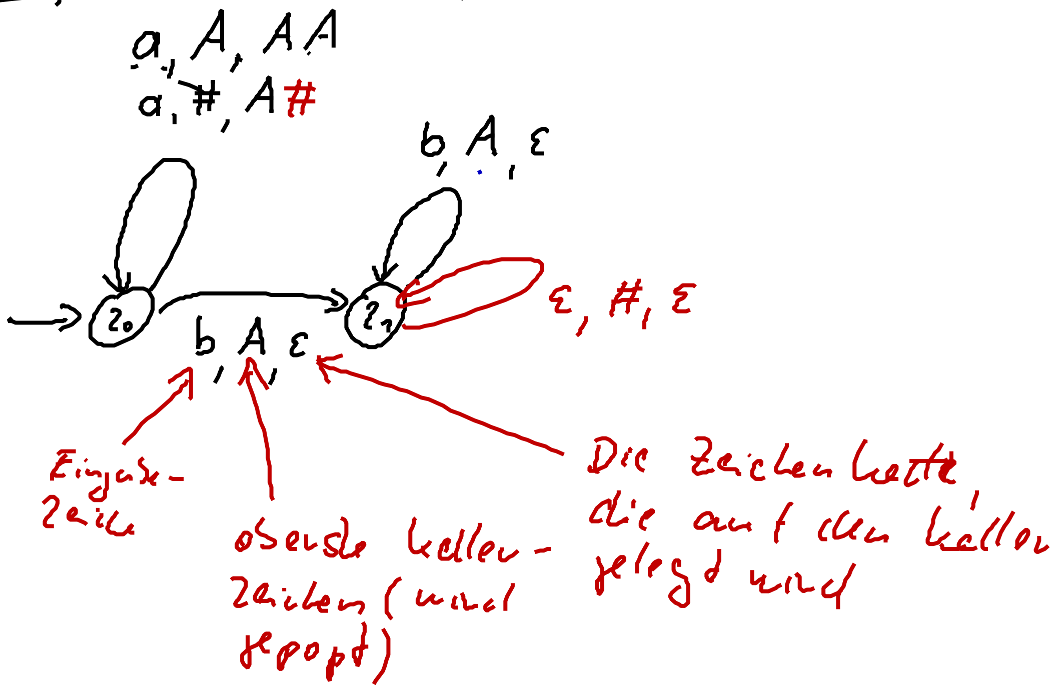
1.2.5 Kellermaschinen

Bsp: $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$



$z_0,\ aab\cancel{b}\cancel{b},\ \#$

$\vdash$

$z_0,\ ab\cancel{b}\cancel{b},\ A\#$

$\vdash$

$z_0,\ b\cancel{b}\cancel{b},\ AA\#$

$\vdash$

$z_1,\ \cancel{b}\cancel{b},\ A\#$

$\vdash$

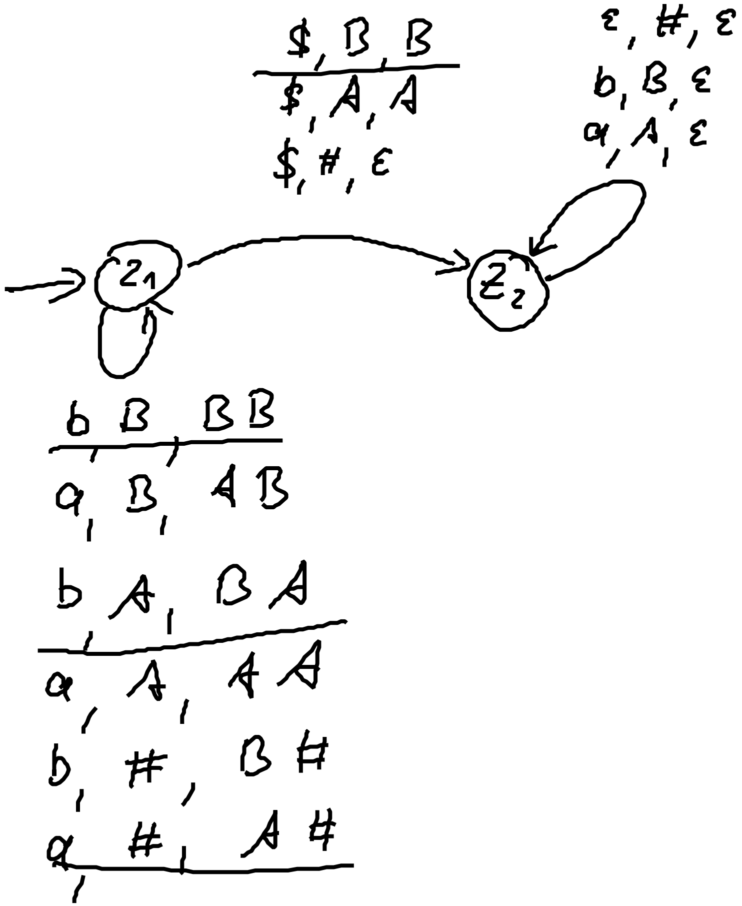
$z_1,\ \cancel{b},\ \cancel{\#}$

$z_1,\ \varepsilon,\ A\#$

Akzeptiert: Wenn der Keller leer ist und die Eingabe leer ist!

Bsp $\quad L = \{ w \$ w^R \mid w \in \{a, b\}^* \}$

abb$bba



z_1, abb$bba, $\#$

z_1, bb$bba, $A\#$

z_1, b$bba, $BA\#$

z_1, $bba, $BBA\#$

z_2, bba, $BBA\#$

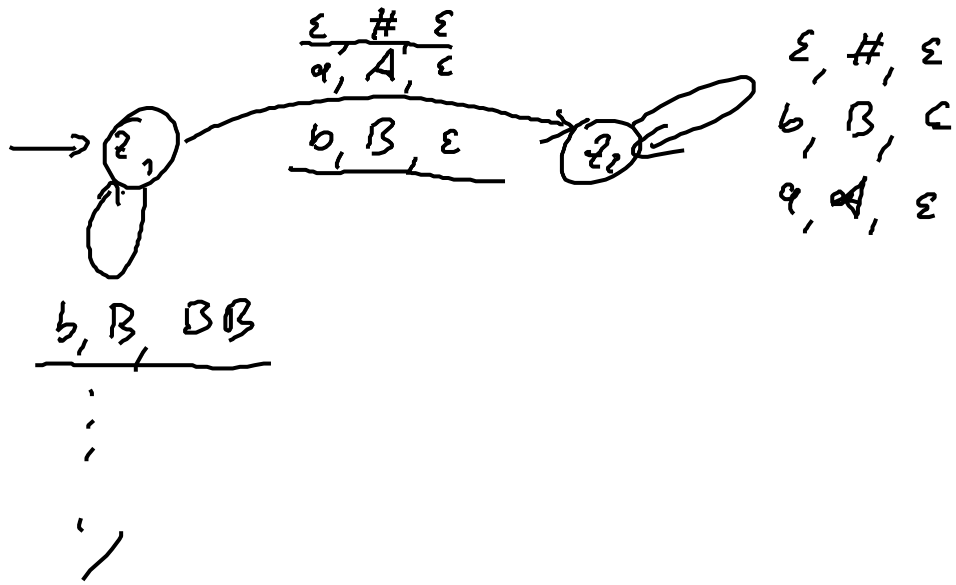
z_2, ba, $BA\#$

z_2, a, $A\#$

z_2, ε, $\#$

z_2, ε, ε

Bsp $\quad L = \{ w w^R \mid w \in \{a, b\}^* \}$



$z_1, abbbba, \# \vdash z_2, abbbba, \varepsilon$

$\vdash z_1, bbbba, A\#$

$\vdash z_1, bbba, BA\# \vdash z_2, bba, A\#$

$\vdash z_1, bba, BBA\# \vdash z_1, ba, BBBA\#$

$\vdash z_2, ba, BA\#$

$\vdash z_2, a, A\#$

$\vdash z_2, \varepsilon, \#$

$\vdash z_2, \varepsilon, \varepsilon$

Warum Akzeptanz mit leerem Keller?

<u>Def</u> Ein PDA mit Endzuständen (PDAE) ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$ wobei $E \subseteq Z$ und es gilt:

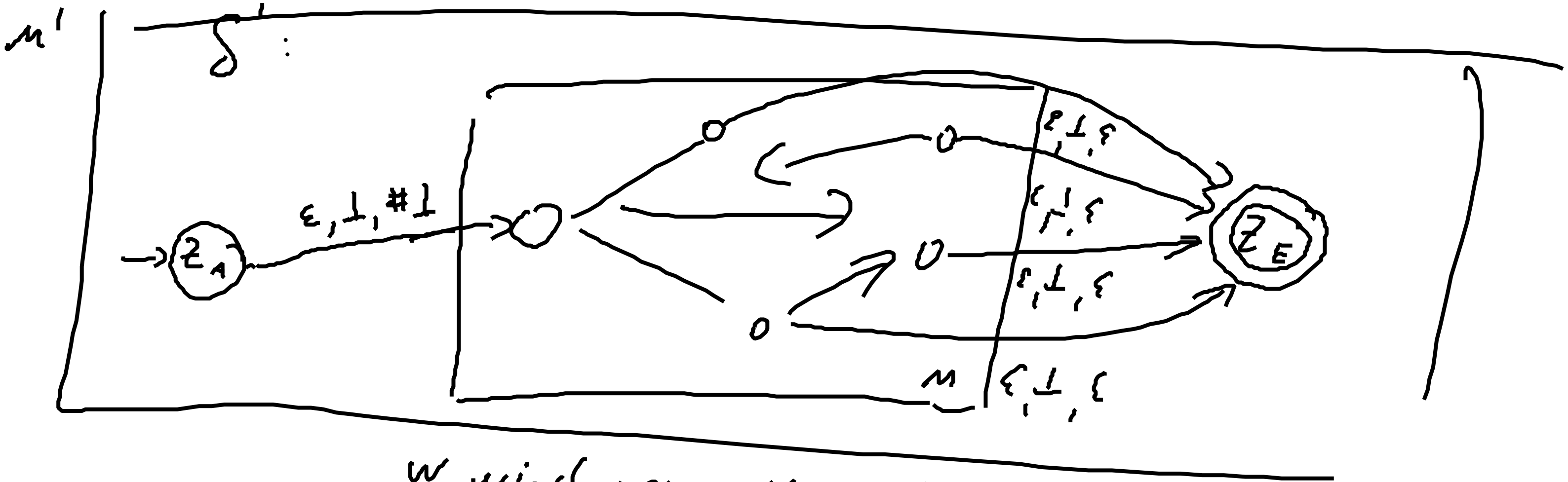
$N(M) = \{ w \mid (z_0, w, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, x)$ für $z \in E$ und für $x \in \Gamma^* \}$

$(z, \varepsilon, \varepsilon)$ für jeden $z \in Z$

<u>Satz</u> Eine Sprache wird von einem PDA akz. gdw. sie von einem PDAE akzeptiert wird.

<u>Bew</u>:

$(\Rightarrow)$ Gegeben ein PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ konstr. PDAE $M' = (Z \cup \{z_A, z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\bot\}, \delta', z_A, \bot, \{z_E\})$ mit $z_A, z_E \notin Z$, $\bot \notin \Gamma$



w wird von M mit leerem Keller akzeptiert

$\Rightarrow$ w wird M' mit Endzustand akzeptiert

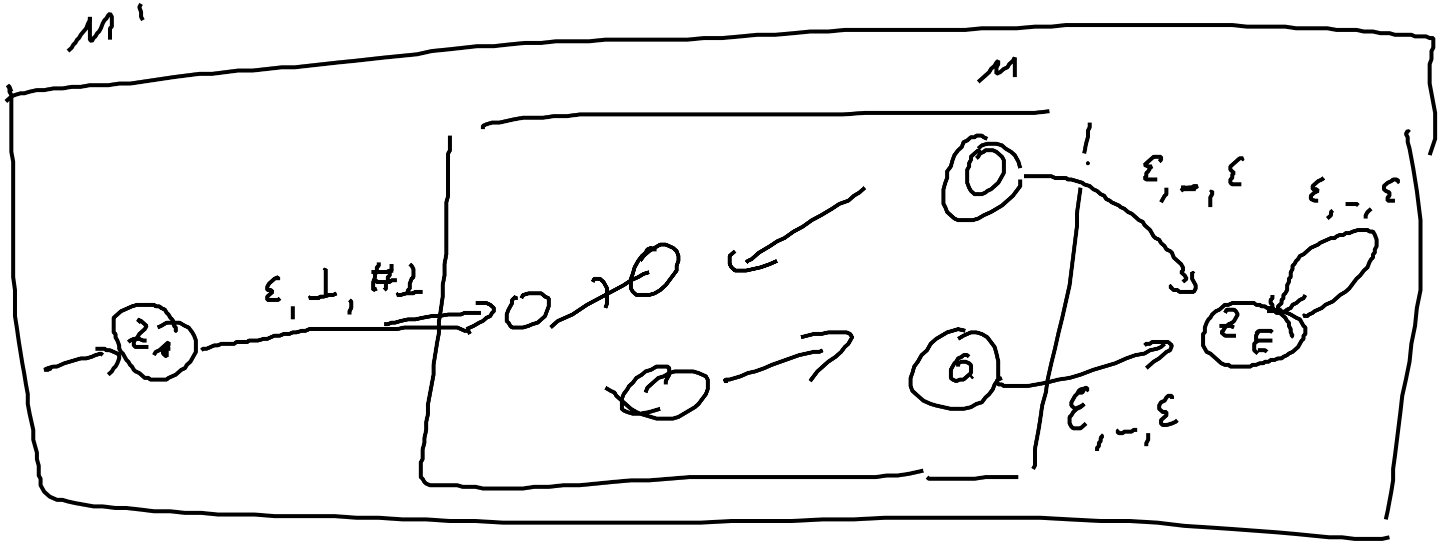
w wird von M' akz.

$\Rightarrow$ w wird von M akz. !

($\Leftarrow$): Gegeben ein PDAE $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$, konstr.

PDA $M' = (Z \cup \{z_A, z_E\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\bot\}, \delta', z_A, \bot)$ wobei

$z_A, z_E \notin Z$, $\bot \notin \Gamma$.



w wird akz. von M

⇒ w wird von M' akz

w wird akz von M'

⇒ w wird akz von M.

$\square$

Satz Eine Sprache ist kontextfrei gdw. sie von einem PDA akzeptiert wird.

Bew:

(⇒) Gegeben eine kf. Gram. $G = (V, \Sigma, P, S)$

wir konstr. ein PDA

$$M = (\{z\}, \Sigma, V \cup \Sigma, \delta, z, S)$$

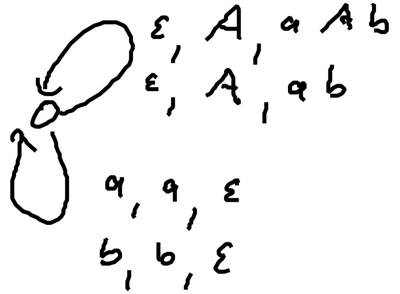
Für $(A \to \alpha) \in P$ mit $A \in V$, $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ setze

$$\delta(z, \varepsilon, A) \ni (z, \alpha).$$

Für alle $a \in \Sigma$:

$$\delta(z, a, a) \ni (z, \varepsilon)$$

$A \to aAb \mid ab$



Nun gilt:

$x \in L(G)$ gdw. $S \Rightarrow^* x$

gdw. es gibt eine Folge von Konf

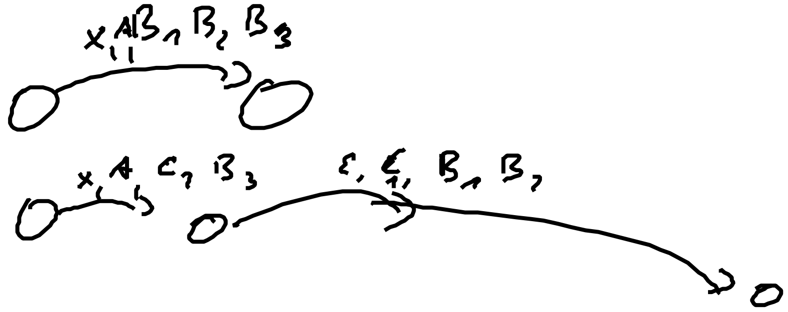
$(z, x, S) \vdash \ldots \vdash (z, \varepsilon, \varepsilon)$

gdw $x \in N(M)$

(⇐) Sei $L = N(M)$ für PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$.

OBdA jede δ-Regel hat die Form

$$\delta(z, x, A) \ni (z', B_1 \ldots B_k) \text{ und } k \le 2.$$



Konstruiere $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei

$$V = \{S\} \cup Z \times \Gamma \times Z$$

aktuellen Zustand

aktuelles Kellersymbol

Zustand, in den man gelangt, wenn der Keller wieder so aussieht wie nachdem man das Kellersymbol gelesen hat.

Idee: Man will die Rechnung der Maschine durch Linksableitung simulieren.

$P = \{ S \to (z_0, \#, z) \mid z \in Z \} \cup$

$\{ (z, A, z') \to a \mid \delta(z, a, A) \ni (z', \varepsilon) \} \cup$

$\{ (z, A, z') \to a\,(z_1, B, z') \mid \delta(z, a, A) \ni (z_1, B),\ z' \in Z \} \cup$

$\{ (z, A, z') \to a\,(z_1, B, \underline{z_2})\,(\underline{z_2}, C, z') \mid \delta(z, a, A) \ni (z_1, BC),\ z', z_2 \in Z \}$

Zu zeigen:

$(z, A, z') \Rightarrow^* x \in \Sigma^*$ $\underline{\text{gdw.}}$ $(z, x, A) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$

$(z_0, \#, z') \Rightarrow^* x \in \Sigma^*$ gdw. $(z_0, x, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$

Für den Fall $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ (1 Schr.H):

$(z, A, z') \Rightarrow a$ $\underline{\text{gdw.}}$ $((z, A, z') \Rightarrow a) \in P$

$\underline{\text{gdw.}}$ $\underline{\delta(z, a, A) \ni (z', \varepsilon)}$

$\underline{\text{gdw.}}$ $(z, a, A) \vdash (z', \varepsilon, \varepsilon)$

Für $n > 1$ Schritte:

Sei $x = ay$ $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

$$(z, ay, A) \vdash (z_1, y, \alpha) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)$$

1) $\alpha = \varepsilon$, Nur ein einziger Schritt, aber $n > 1$

2) $\alpha = B$, Nach IV $(z_1, B, z') \Rightarrow^* y$. Aus Bed.

   wissen wir $\delta(z, a, A) \ni (z_1, B)$, d.h.

   $(z, A, z') \to a(z_1, B, z') \in P$, d.h. es gilt

   $(z, A, z') \Rightarrow^* ay = x$

3) $\alpha = BC$.