1.7.3 Abschlusseigenschaften

Satz

Die kontextfreien Sprachen sind abgeschlossen unter
- Vereinigung,
- Produkt,
- Stern.

Sie sind nicht abgeschlossen unter
- Schnitt,
- Komplement.

Bew.: Gegeben kontextfreie Gram. $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$
und $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$, wobei $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
und $S \notin V_1 \cup V_2$.
OBdA sind alle Sprachen ε-frei.

Vereinigung: Konstruiere G mit $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$.

$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$

Produkt: Konstruiere G mit $L(G) = L(G_1) \cdot L(G_2)$

$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$.

Stern: Konstruiere G mit $L(G) = (L(G_1))^*$

$G = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \to S_1, S \to S S_1, S \to \varepsilon\}, S)$

ε-Sonderregel und ε-Elimination beachte.

Schnitt: $L = \{ a^n b^m c^i d^m \mid n, m \geq 1 \}$ ist nicht kf.
([ )]

$L_1 = \{ a^n b^j c^n d^i \mid i, j, n \geq 1 \}$ ist kf

$S \to XY$

$X \to aXc$

$X \to Z$

$Z \to b \mid bZ$

$Y \to d \mid dY$

$L_2 = \{ a^j b^m c^i d^m \mid i, j, m \geq 1 \}$ ist kf

$L_1 \cap L_2 = L$ ist nicht kf !!

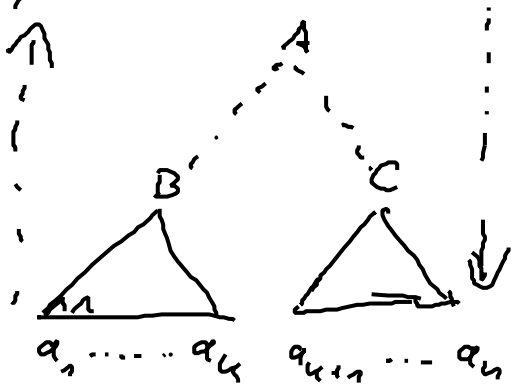
Komplement: Angenommen, die Typ 2 Spr. wären unter Komplement abgeschlossen. $\overline{L_1} \cup \overline{L_2} = L_1 \cap L_2$.
D.h. wg. dieser Tatsache wäre die kf. Sprache auch unter Schnitt abgeschlossen. ↯

□

1.7.4 CYK-Algorithmus

Effizienter Algorithmus für das Wortproblem kontextfreier Sprachen. Autoren: Cocke, Younger, Kasami.

Idee: Berechne bottom-up alle möglichen Überdeckungen



Es ex. Regel $A \to BC$

Für alle Anfangspositionen i, für alle Längen von Teilwörtern j berechne, welches Var.-Symbol das Teilwort überdecken kann.

CYK-Algorithmus

Gegeben: CNF-Gram. $G = (V, \Sigma, P, S)$

Eingabe: $x = a_1 a_2 \dots a_n$

Ausgabe: Wahr gdw. $x \in L(G)$

$T[i][j]$: Pos. (←) Länge (→)
Mengen von Var-Symbolen, die Teilwörter überdecken, die bei i beginnen und die Länge j haben.

For $i = 1..n$ do
  $T[i][1] = \{ A \in V \mid (A \to a_i) \in P \}$ $O(n)$
End

For $j = 2..n$ do // Länge der Überdeckung
  For $i = 1..n+1-j$ // Anfangspos. 1. Wort
    $T[i][j] = \emptyset$
    For $k = 1..j-1$ do // Länge des 1. Wortes
      $T[i][j] = T[i][j] \cup \{ A \in V \mid (A \to BC) \in P, B \in T[i][k] \wedge C \in T[i+k][j-k] \}$
    End
  End
End

Return $(S \in T[1][n])$

$O(n^3)$

Bsp $L = \{ a^n b^n c^m \mid n, m \geq 1 \}$

$S \to XY$

$X \to ab \mid aXb$

$Y \to c \mid cY$

$S \to XY$

$X \to AB$

$X \to AE$

$E \to XB$

$Y \to c$

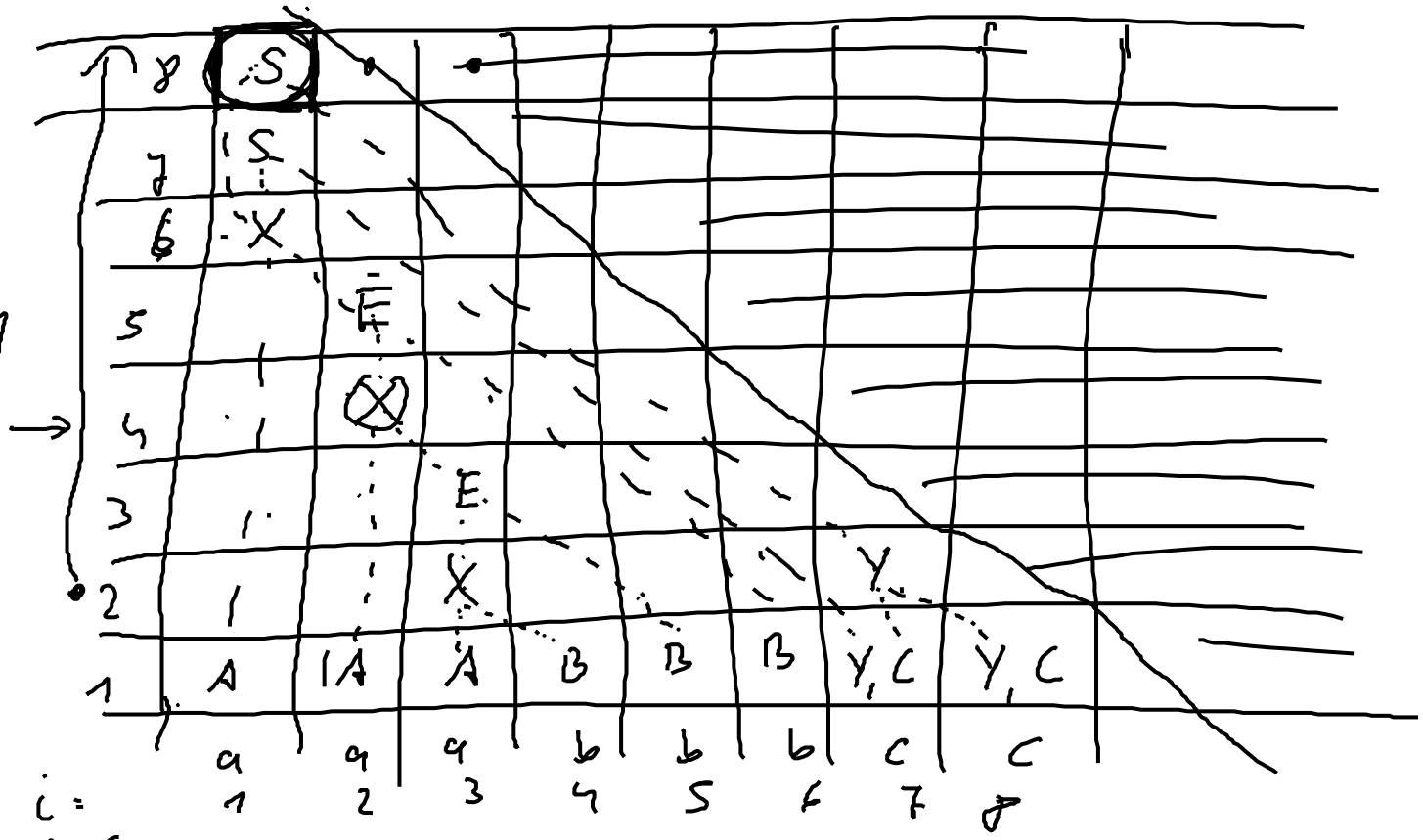
$Y \to CY$

$A \to a$

$B \to b$

$C \to c$

$x = aaabbbcc$



$k = 1 \ldots 5$

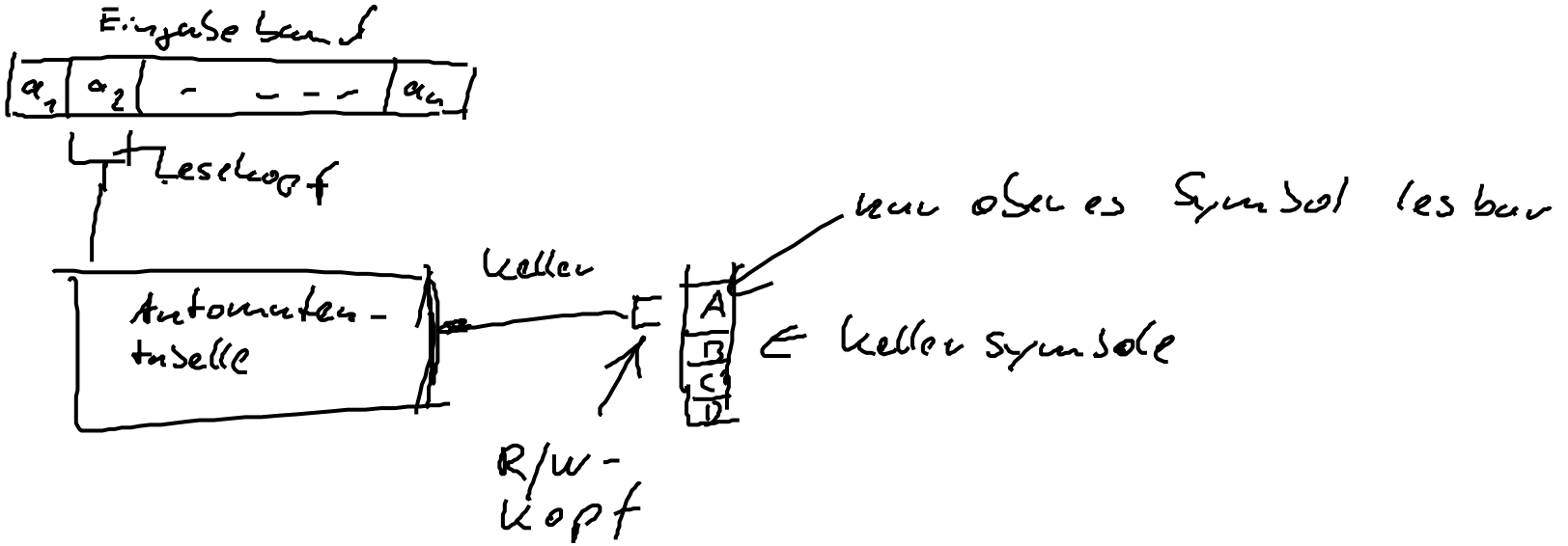
$k = 1 \ldots 4$

$k = 1 \ldots 3$

1.7.5 Kellerautomaten / Push-Down-Aut. / Stack-Automate

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ nicht kontextfrei.

Idee des Kellerautomaten:



Def. Ein <u>nicht-deterministischer</u> Kellerautomat (PDA) ist ein 6-Tupel

$$M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$$

wobei

- Z endl. Zustandsmenge
- Σ Eingabealphabet
- Γ Kelleralphabet

- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to P_e(Z \times \Gamma^*)$
  (P_e bezeichnet Menge aller endlichen Teilmengen
- $z_0 \in Z$ Startzustand
- $\# \in \Gamma$, das leere Kellerzeichen.

Idee: $\delta(z, a, A) \ni (z', B_1 \dots B_k)$ bedeutet ($k \geq 0$):
Wenn M in Zustand z ist, a liest und A oberstes Kellersymbol ist, geht in in Zustand z' und ersetzt A durch die Folge $B_1 \dots B_k$, wobei B_1 oberes Kellersymbol wird.
$\delta(z, \varepsilon, A) \ni (z', B_1 \dots B_k)$ ist spontaner Übergang ohne Lesen eines Eingabezeichens.

Def. Eine Konfiguration eines Kellerautomaten ist gegeben durch ein Tripel $k \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$
Die Nachfolgerelation $\vdash$ auf Konfigurationen ist gegeben durch:

$(z, a_1 \dots a_n, A_1 \dots A_m) \vdash$

$(z', a_2 \dots a_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_m)$

falls $\delta(z, a_1, A_1) \ni (z', B_1 \dots B_k)$

$(z', a_1 \dots a_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_m)$

falls $\delta(z, \varepsilon, A_1) \ni (z', B_1 \dots B_k)$

Sei $\vdash^*$ die reflexive, transitive Hülle. Dann ist die durch M akz. Sprache def. als

$$L(M) = \{ x \in \Sigma^* \mid \underbrace{(z_0, x, \#) \vdash^* (z, \varepsilon, \varepsilon)}_{\text{für ein } z \in Z} \}$$

(kellerleer)

□

Achtung: Akzeptanz durch leeren Keller!