1.6.4 Pumping-Lemma

__Idee__: Wir wollen nachweisen, dass eine Sprache nicht regulär ist.

__Satz__ (Pumping-Lemma, Bar-Hillel-Theorem, uvw-Theorem)

Sei L eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass sich für alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung $x = uvw$ finden lässt, so dass folgende Bedingungen gelten:

(1) $|v| \geq 1$

(2) $|uv| \leq n$

(3) Für alle $i \geq 0$ gilt: $u\underline{v}^i w \in L$, $i \geq 0$.

$\forall L$ reg Spr $\Rightarrow$ ($\exists n \in \mathbb{N}$:

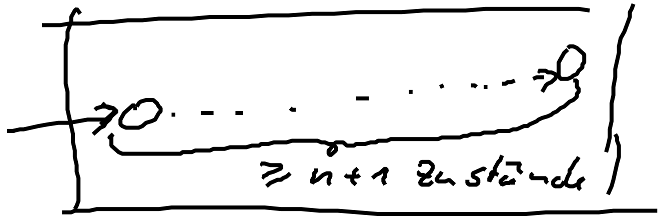
$\forall x \in L : |x| \geq n \Rightarrow (\exists u, v, w$:

$x = uvw \land (1) \land (2) \land (3)))$

Bew: L regulär. D.h. $L = T(M)$ für DFA

$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$.

Setze $n = |Z|$. Sei $x \in L$ beliebig und $|x| \geq n$.



D.h. wir besuchen mind. einen Zustand mindestens zweimal. Und dies geschieht bei den ersten $n+1$ besuchten Zuständen

Die Zerlegung uvw erfüllt $|v| \geq 1$, $|uv| \leq n$, $uv^i w \in L$ $\square$

Anwendung: Zeige, dass $L = \{ a^k b^k \mid k \geq 1 \}$ ist nicht regulär.

Bew: $\boxed{\text{Angenommen } L \text{ ist reg.}}$ D.h. es ex. eine PL-Zahl n. Betrachte $a^n b^n$ (mit Länge $2n$). Nun muss eine Zerlegung $uvw = a^n b^n$ existieren, die (1) - (3) erfüllt.

wg (1): $|v| \geq 1$, d.h. $v \neq \varepsilon$.

wg (2): $|uv| \leq n$, muss gelten $uv = a^k$, $k \leq n$

$\Rightarrow v = a^i$ mit $i \geq 1$

wg (3) müsste jetzt $a^{n-|v|} b^n \in L \Rightarrow$ Widerspruch $\square$

Bsp $L = \{ a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl} \}$

$= \{ a, aaaa, a^9, a^{16}, \dots \}$

Bew: Angenommen L sei regulär. Dann ex. PL-Zahl n. Wähle $x = a^{n^2}$. Sei $x = uvw$ beliebig, die die Bed (1), (2), und (3) erfüllt.

wg. (1) und (2):

$$1 \le |v| \le |uv| \le n$$

mit (3) folgt

$$uv^2w \in L,$$

$$n^2 = |x| = |uvw| < |uv^2w| \le n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

D.h. $|uv^2w|$ zwischen 2 aufeinanderfolgende Quadratzahlen liegt, und deshalb kann uv^2w nicht zu L gehören $\to$ Widerspruch.

$\square$

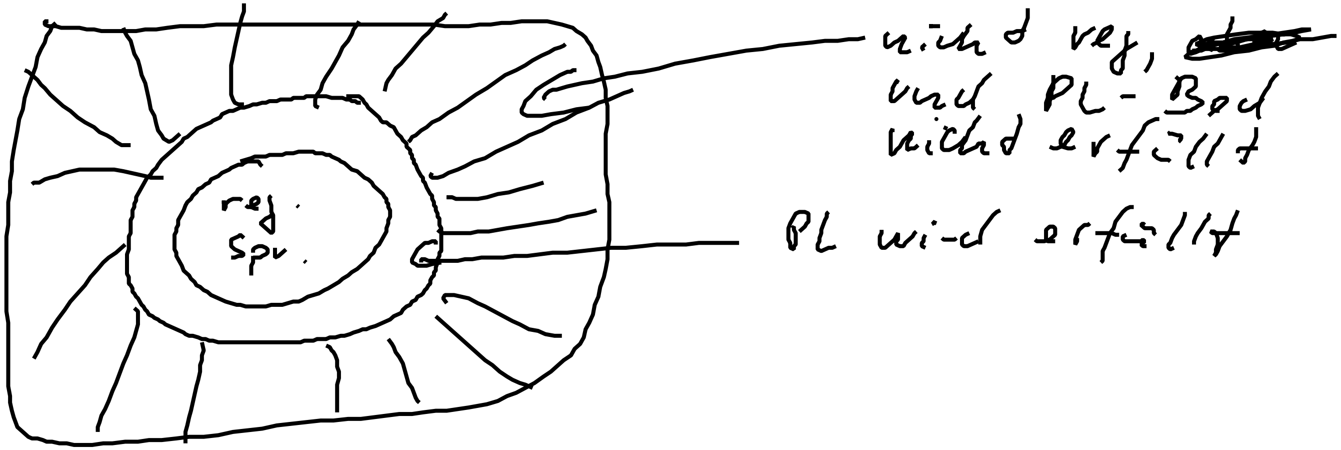
__Bem.__: Nur notwendige, keine hinreichende Bedingung.

D.h. es kann nicht-reg. Sprachen geben, die die Bed. erfüllen.

__Bsp__: $L = \{ a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0 \} \cup \{ b, c \}^*$

$a \ldots a \; bbbccc$ $\qquad\qquad$ $bcbccbbbbb$

Sei p die PL-Zahl. Die PL-Bed ist für $\{b, c\}^*$ trivial erfüllt ✓. Für $a^k b^m c^m$ mit $k + 2m \geq p$ und $k \geq 1$, ex. Zerlegung: $u = \varepsilon$, $v = a$, $w = a^{k-1} b^m c^m$.



1.6.5 Nerode-Relation und Minimalautomaten

<u>Def.</u> (Äquivalenzrel.)

Eine binäre Relation über einer Menge X, symb. $\sim$, heißt Äquivalenzrelation, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Reflexivität: $x \sim x \quad x \in X$

(2) Transitivität: $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z \quad x, y, z \in X$

(3) Symmetrie: $x \sim y \Rightarrow y \sim x \quad \forall x, y \in X$.

<u>Def.</u> (Äquivalenzklassen, Index)

$[x]_\sim$ bezeichnet die Menge aller Elemente y mit $x \sim y$.

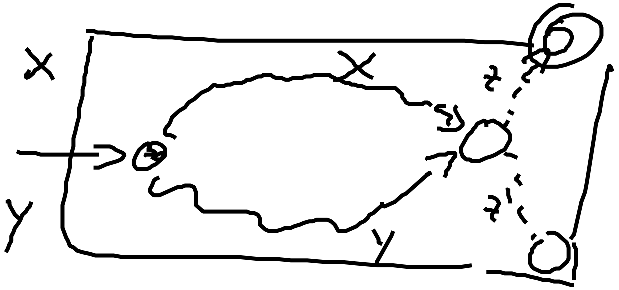
Der Index einer Äquivalenzrelation ist die Anzahl der Äquivalenzklassen.

Def (Nerode-Relation)

Gegeben ein Sprache $L \subseteq \Sigma^*$. Dann ist die Nerode-Relation $\sim_L$ wie folgt definiert:

$$x \sim_L y \quad \underline{\text{gdw.}} \quad \forall z \in \Sigma^* : (xz \in L \ \underline{\text{gdw.}}\ yz \in L)$$

Bem: Offensichtlich Äquivalenzrelation.



Satz (Myhill, Nerode)

Eine Sprache L ist genau dann regulär wenn der Index von $\sim_L$ endlich ist.

Bew ($\Rightarrow$) Sei L reg. und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $L = T(M)$. Dann definieren wir $\sim_M$:

$$x \sim_M y \quad \underline{\text{gdw.}} \quad \hat{\delta}(z_0, x) = \hat{\delta}(z_0, y)$$

$\sim_M$ ist eine Äquivalenzrelation.

Wir $\boxed{x \sim_M y} \Longrightarrow \boxed{x \sim_L y}$

Sei $x \sim_M y$, d.h. $\underline{\hat{\delta}(z_0, x) = \hat{\delta}(z_0, y)}$. Sei $z \in \Sigma^*$ beliebig,

dann gilt:

$$
\begin{aligned}
xz \in L \quad &\underline{\text{gdw}} \quad \hat{\delta}(z_0, xz) \in E \\
&\underline{\text{gdw}} \quad \hat{\delta}(\hat{\delta}(z_0, x), z) \in E \\
&\underline{\text{gdw}} \quad \hat{\delta}(\hat{\delta}(z_0, y), z) \in E \\
&\underline{\text{gdw}} \quad \hat{\delta}(z_0, yz) \in E \\
&\underline{\text{gdw}} \quad yz \in L
\end{aligned}
$$

$|Z| \geq \mathrm{Index}(\sim_M) \geq \mathrm{Index}(\sim_L) \leadsto \mathrm{Index}(\sim_L)$ endlich.

($\Leftarrow$) Sei Index($\sim_L$) endlich, d.h. $\Sigma^* = [x_1]_{\sim_L} \cup [x_2]_{\sim_L} \cup \dots \cup [x_n]_{\sim_L}$

Konstruiere DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$:

- $Z = \{ [x_1], [x_2], \dots, [x_n] \}$
- $z_0 = [\varepsilon]$
- $E = \{ [x] \mid x \in L \} \in$
- $\delta([x], a) = [xa]$

Es folgt: $\hat{\delta}([\varepsilon], x) = [x]$

$x \in T(M)$ gdw. $\hat{\delta}(z_0, x) \in E$

gdw. $\hat{\delta}([\varepsilon], x) \in E$

gdw. $[x] \in E$

gdw. $x \in L$

$\square$