Nicht-Determinismus vs. Determinismus

Satz Für jede reguläre Gram. $G = (V, \Sigma, P, \underline{S})$ gibt es einen <u>NFA</u> M mit $L(G) = T(M)$.

Bew.: Sei Typ 3 Gramm $G = (V, \Sigma, P, S)$ gegeben. Wir konstruieren NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, S', E)$ wie folgt:

$$Z = V \cup \{X\} \quad \text{mit } X \notin V$$

$$S' = \begin{cases} \{S, X\} & \text{falls } \underline{S \to \varepsilon \in P} \\ \{S\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\cancel{\boxed{A \to Ba}}$$

$$\cancel{B}$$

$$\delta(A, a) \ni B \quad \text{falls } \underline{\boxed{A \to aB}} \in P$$

$$\delta(A, a) \ni X \quad \text{falls } A \to a \in P$$

$$E = \{X\}$$

Für alle $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$ mit $n \geq 1$

$a_1 a_2 \dots a_n \in L(G)$

gdw es ex. $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ mit

$$S \Rightarrow \underline{a_1 A_1} \Rightarrow \underline{a_1 a_2 A_2} \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} A_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$$

$A_1 \to a_2 A_2$

gdw. es ex. eine Zustandsfolge $A_1, \dots, A_{n-1}$ mit

$$\delta(S, a_1) \ni A_1, \; \delta(A_1, a_2) \ni A_3, \dots, \delta(A_{n-1}, a) \ni X$$

gdw.

$a_1 a_2 \dots a_n \in T(M)$

$\square$

1.6.3 Reguläre Ausdrücke

<u>Bem</u>: reguläre Ausdrücke (bzw. Pakete zur Beh. von solchen) gibt es in jeder vernünftigen Programmierspr.

<u>Def.</u>

Reguläre Ausdrücke sind wie folgt aufgebaut

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
- ε — " —
- Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ein regulärer Ausdr.
- Wenn α und β reguläre Ausdrücke sind, dann auch

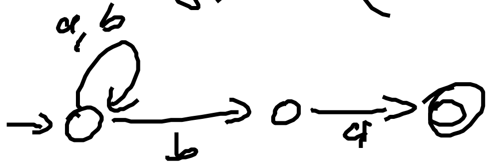
  $\alpha\beta$, $(\alpha|\beta)$ und $(\alpha)^*$

Def (Beschriebene Sprache)

Ein regulärer Ausdruck γ beschreibt die Sprache $L(\gamma)$:

- Falls $\gamma = \emptyset$, dann $L(\emptyset) = \emptyset$
- Falls $\gamma = \varepsilon$, dann $L(\gamma) = \{\varepsilon\}$
- Falls $\gamma = a$, dann $L(\gamma) = \{a\}$
- Falls $\gamma = \alpha\beta$, dann $L(\gamma) = L(\alpha)L(\beta)$
  $= \{uv \mid u \in L(\alpha), v \in L(\beta)\}$
- Falls $\gamma = (\alpha|\beta)$, dann $L(\gamma) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
- Falls $\gamma = (\alpha)^*$, dann $L(\gamma) = (L(\alpha))^*$

Bsp $(a|b)^*ba$



Bem: Alle endl. Spr. sind durch reg. Ausdrücke beschreibbar

$L_1 = \{w_1, \dots, w_n\}$ $\quad L(w_1|w_2|\dots|w_n) = L_1$

Satz (Kleene)

Die Menge der durch (reg. Ausdrücke) beschreibbaren Sprachen ist genau die Menge der regulären Sprachen.

Bew:

(⇒) Wenn A durch reg. Ausdr. γ beschreibbar ist, dann ex. ein NFA M_γ mit $T(M_\gamma) = A$.

Konstruktion und strukturelle Induktion.

IA: Für $\gamma = \emptyset$, $\gamma = \varepsilon$, $\gamma = a$ $(a \in \Sigma)$ offensichtlich!

IV: Für reg. Ausdrücke α und β seien

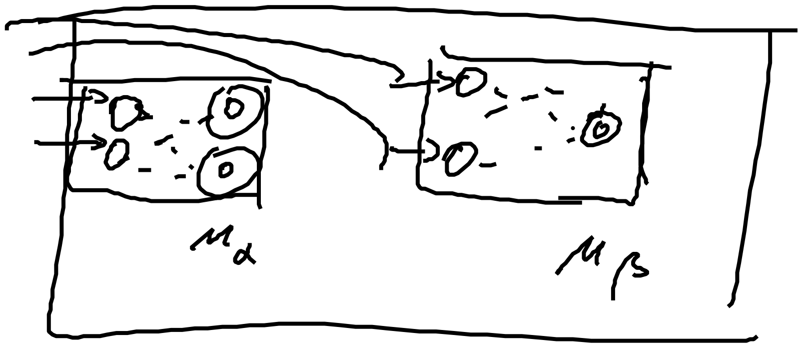
$M_\alpha = (Z_\alpha, \Sigma, \delta_\alpha, S_\alpha, E_\alpha)$ und $M_\beta = (Z_\beta, \Sigma, \delta_\beta, S_\beta, E_\beta)$

mit $Z_\alpha \cap Z_\beta = \emptyset$

die NFA's mit $L(\alpha) = T(M_\alpha)$ und $L(\beta) = T(M_\beta)$.

IS:

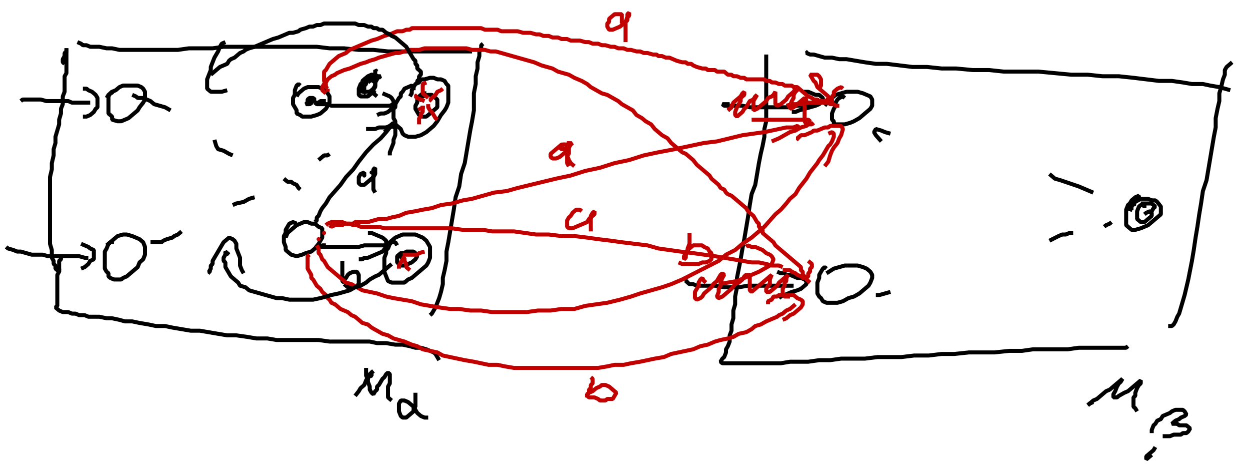
1) $\gamma = (\alpha | \beta)$ Konstr. M_γ



$$M_\gamma = (Z_\alpha \cup Z_\beta, \Sigma, \delta_\alpha \cup \delta_\beta, S_\alpha \cup S_\beta, E_\alpha \cup E_\beta)$$

$$T(M_\gamma) = L(\gamma)$$

2) $\gamma = \alpha\beta$



$$M_\gamma = (Z_\alpha \cup Z_\beta, \Sigma, \delta_\gamma, S_\gamma, E_\beta)$$

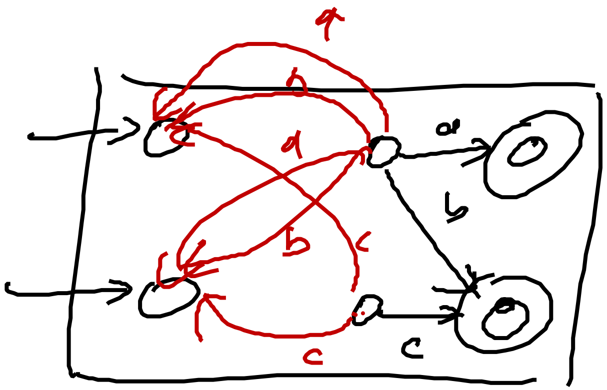
$$\delta_\gamma = \delta_\alpha \cup \delta_\beta \cup \underline{\delta'}$$

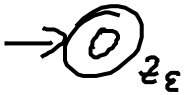
$$S_\gamma = \begin{cases} S_\alpha & \text{falls } \varepsilon \notin L(\alpha) \\ S_\alpha \cup S_\beta & \text{falls } \varepsilon \in L(\alpha) \end{cases}$$

Für alle $z \in Z_\alpha$ und alle $a \in \Sigma$, falls $z' \in E_\alpha$, sodass $\delta_\alpha(z,a) \ni z'$, dann soll $\underline{\underline{\delta'(z,a) \ni z''}}$ für alle $z'' \in S_\beta$ gelten.

$$T(M_\gamma) = L(\gamma)$$

3) $\gamma = (\alpha)^*$





$$M_\gamma = (Z_\alpha \cup \{z_\varepsilon\},\ \Sigma,\ \delta_\alpha \cup \delta',\ S_\alpha \cup \{z_\varepsilon\},\ E_\alpha \cup \{z_\varepsilon\})$$

wobei $z_\varepsilon \notin Z_\alpha$

Für alle $z \in Z_\alpha$ und $a \in \Sigma$:

Falls $\delta_\alpha(z, a) \ni z'$ und $z' \in E_\alpha$, dann

soll $\delta'(z, a) \ni z''$ für alle $z'' \in S_\alpha$.

$T(M_\gamma) = L(\gamma)$

(⇐): Wir konstruieren induktiv für einen gegebenen DFA M einen regulären Ausdruck γ mit

$$L(\gamma) = T(M).$$

Alle Zustände in M sind von 1 bis $n = |Z|$ durchnummeriert.

Sei $R^k_{i,j}$ für $0 \le i,j,k \le n$ die folgende Menge:

$R^k_{i,j} = \{ w \in \Sigma^* \mid$ w überführt M gestartet in z_i in z_j ($\hat{\delta}(z_i, w) = z_j$), ohne dass ein Zustand außer z_i und z_j mit einem Index größer als k besucht wird $\}$

$$\rightarrow z_1 \xrightarrow{a} z_3 \xrightarrow{b} z_2$$

$$R^0_{1,3} = \{a\}$$

$$R^0_{1,2} = \emptyset \qquad R^1_{1,2} = \emptyset \qquad R^2_{1,2} = \emptyset$$

$$R^3_{1,2} = \{ab\}$$

$R^0_{i,j} = \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\}$ für den Fall $z_i \neq z_j$

$R^0_{i,j} = \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\} \cup \{\varepsilon\}$ für den Fall $z_i = z_j$

Für $k=0$ ist $R^k_{i,j}$ endlich, d.h. es ex. ein reg. Ausdruck, der $R^0_{i,j}$ beschreibt.

Induktion über k:

IA $k = 0$ ✓

$$R^{k+1}_{i,j} = \underline{R^k_{i,j}} \cup R^k_{i,k+1} \left(R^k_{k+1,k+1} \right)^* R^k_{k+1,j}$$

□