Satz Jede durch einen DFA akzeptierte Sprache ist vom Typ 3.

Bew.: Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $T(M) = A$.

Wir konstruieren eine Typ 3 Gramm. mit $L(G) = A$.

Es ist $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $V = Z$
- $S = z_0$
- P enthält die folgenden Regeln:

$z_i \to a z_j$ falls $\delta(z_i, a) = z_j$ $\quad a \in \Sigma,\ z_i, z_j \in Z$

$z_i \to a$ falls $\delta(z_i, a) = z_j$ und $z_j \in E$

Dann folgt für alle $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$:

$a_1 a_2 \ldots a_n \in T(M)$

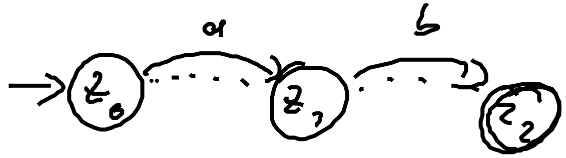
gdw. es ex. eine Folge $z_0, z_1, \ldots, z_n$ $z_i \in Z$ mit

$\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i \quad i = 1, \ldots, n$ und $z_n \in E$

gdw. es ex. (nach Konstruktion von G) eine Folge von Variablen $z_0, z_1, \ldots, z_n$ mit

$z_0 \Rightarrow a_1 z_1 \Rightarrow a_1 a_2 z_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} z_{n-1} \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$

gdw $a_1 a_2 \dots a_n \in L(G)$. $\square$



$\Sigma = \{a, b\}$

$V = \{z_0, z_1, z_2\}$

$P = \{ z_0 \to a z_1,\ z_1 \to b z_2,\ z_1 \to b \}$

$z_0 \Rightarrow a z_1 \Rightarrow \cancel{a b z_2}$

$\Rightarrow ab$

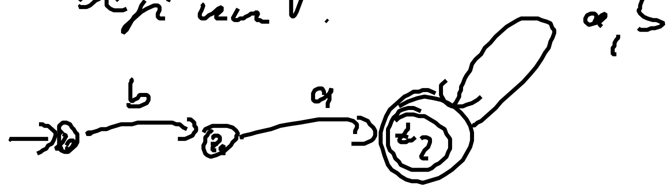
Umkehrung beweisen? $\Rightarrow$ Dazu Automaten verallgemeinern.

1.6.2 Nicht-deterministische endliche Automaten

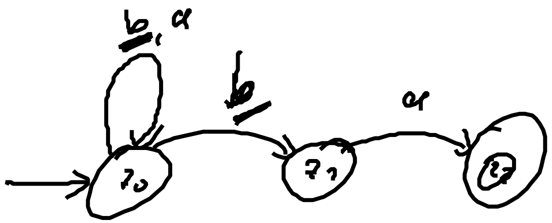
Idee: Für identische Eingabezeichen sind mehrere Nachfolgezustände möglich.

Bsp:

Automat erkennt Worte über $\Sigma = \{a, b\}$, wobei das Wort mit ba beginnt.



Automat soll Worte erkennen, die auf ba enden.



Def. Ein nicht-deterministischer, endlicher Automat (NFA) ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$

- Z endl. Zustandsmenge
- Σ endl. Eingabealphabet $\quad Z \cap \Sigma = \emptyset$
- δ Transitionsfkt. $\quad \delta: Z \times \Sigma \to 2^Z$
- $S \subseteq Z$ Anfangszustände
- $E \subseteq Z$ Endzustände

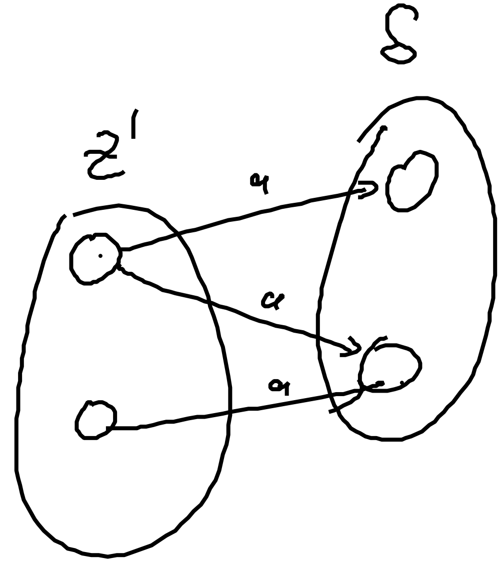
Def. ($\hat{\delta}$ für NFA)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA.

$\hat{\delta} : 2^Z \times \Sigma^* \to 2^Z$ ist def.:

$$\hat{\delta}(Z', \varepsilon) = Z' \quad \text{für alle } Z' \subseteq Z$$

$$\hat{\delta}(Z', aw) = \bigcup_{z \in Z'} \hat{\delta}(\underline{\delta(z,a)}, w)$$



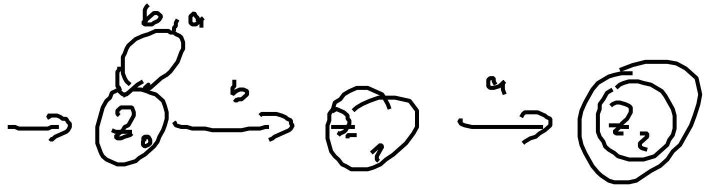
Def. (von NFA akz. Sprache)

Die von einem NFA akz. Sprache ist

$$T(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset \}$$

Idee: Wir betrachten die Menge aller mit der Eingabewort w erreichbaren Zustände, sind auch "erfolgreiche" dabei (Endzustände), dann wird das Wort akzeptiert.

Bsp



Eingabe: abba

$$\hat{\delta}(S, abba) = \hat{\delta}(\{z_0\}, \underline{a}bba) = \bigcup_{z \in \{z_0\}} \hat{\delta}(\delta(z,a), bba)$$

$$= \hat{\delta}(\{z_0\}, \underline{b}ba) = \bigcup_{z \in \{z_0\}} \hat{\delta}(\delta(z,b), ba)$$

$$= \hat{\delta}(\{z_0, z_1\}, ba) = \bigcup_{z \in \{z_0, z_1\}} \hat{\delta}(\delta(z,b), a)$$

$$= \hat{\delta}(\{z_0, z_1\}, a) \cup \emptyset = \bigcup_{z \in \{z_0, z_1\}} \hat{\delta}(\delta(z,a), \varepsilon)$$

$$= \hat{\delta}(\{z_0\}, \varepsilon) \cup \hat{\delta}(\{z_2\}, \varepsilon) = \{z_0\} \cup \{z_2\} = \underline{\underline{\{z_0, z_2\}}}$$

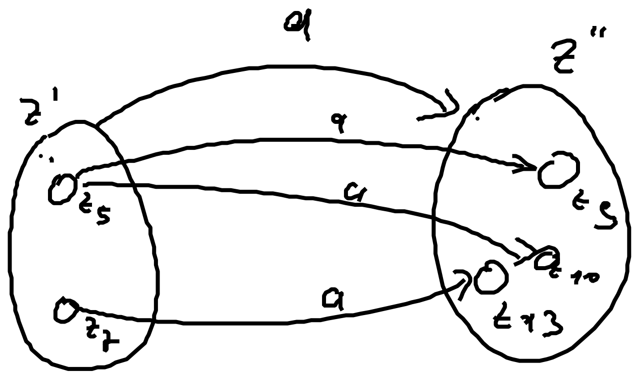
Satz (Rabin, Scott)

Jede von einem NFA akzeptierten Sprache ist durch einen DFA akzeptierbar.

Bew: Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA. Wir konstr. DFA M' mit $T(M) = T(M')$. Dabei ist jeder Zustand von M' ist eine Teilmenge von Z (Potenzmengenautomat):

$$M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E') \text{ und } z_0' \in Z'$$

wobei



$$Z' = 2^Z$$

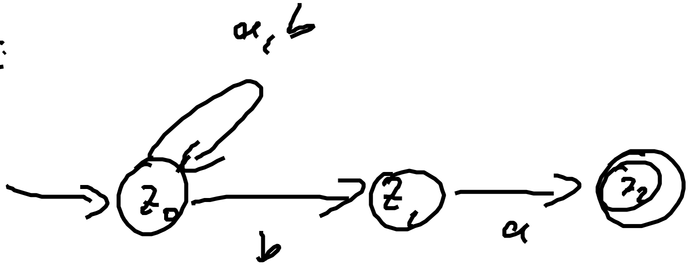
$$\delta'(z', a) = \bigcup_{z \in z'} \delta(z, a)$$

$$z_0' = S$$

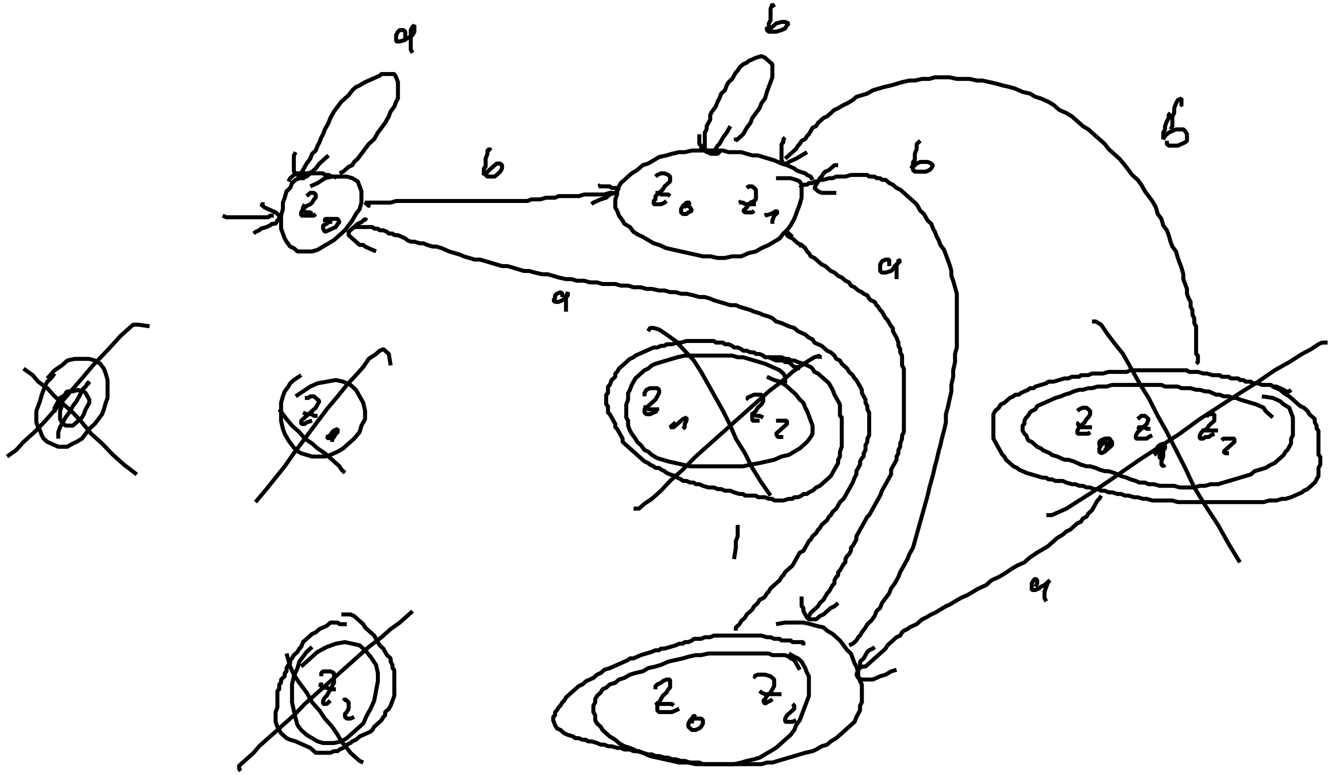
$$E' = \{ z' \in Z' \mid z' \cap E \neq \emptyset \}$$

Bsp:

NFA:



DFA:



Damit gilt für $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$:

$a_1 a_2 \dots a_n \in T(M)$

gdw $\hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset$

gdw es ex. $z_0, z_1, \dots, z_n$ mit $z_i \in Z$ und

$\delta(z_i, a_{i+1}) = z_{i+1}$ und $z_n \in E$, $i = 0, \dots, n-1$

gdw es ex. $z_0', z_1', \dots, z_n' \in Z'$ mit

$\hat{\delta}(z_i', a_{i+1}) = z_{i+1}'$ mit $z_{i+1}' \ni z_{i+1}$ und $z_n' \in E'$

gdw

$\hat{\delta}'(z_0', w) \in E'$

gdw

$w = a_1 a_2 \dots a_n \in T(M')$

$\square$

Satz Für jede reguläre Gramm. $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine NFA M mit $L(G) = T(M)$.