noch Grammatiken

Notation: Σ^*, $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\varepsilon\}$

Def

Eine Grammatik ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$:

- V endl. Menge von Variablensymbolen
- Σ endl. Terminalalphabet, $\Sigma \cap V = \emptyset$
- $P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ Menge der Produktionsregeln
- $S \in V$ Startsymbol

Bsp $H = (V, \Sigma, P, S)$

$V = \{S\}$ $\Sigma = \{a, b\}$ $P = \{S \to \varepsilon, S \to aSb\}$, S ist Startsym.

Notation: Oft wird nur P angegeben (wobei

Variablensymb.: Großbuchstaben, Terminalsymb.: Kleinbuchstaben,
S: Startsymbol)

Def

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik und $u, v \in (V \cup \Sigma)^*$. Dann kann in G v in einem Schritt von u abgeleitet werden, symbolisch $u \Rightarrow_G v$, falls

$$\underline{u} = \underline{xyz}, \quad v = \underline{xy'z}, \quad x, y, y', z \in (V \cup \Sigma)^* \text{ und } (y \to y') \in P$$

Bsp.

Gram. H

$$S \Rightarrow_G a\underline{S}b \Rightarrow_G ab, \quad abS \Rightarrow_G abaSb$$

Def

~~Sei $\Rightarrow_G^*$ die transitive, reflexive Hülle von $\Rightarrow_G$.~~

Die Folge $(w_0, w_1, .., w_n)$ heißt <u>generelle Ableitung</u> von w_0 nach w_n, symbolisch $w_0 \Rightarrow_G^* w_n$, falls

$$w_0 \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow_G \dots \Rightarrow_G w_n$$

gilt

Notation: Oft wird der Subskript G weggelassen.

Def

Die von $G = (V, \Sigma, P, S)$ erzeugte Sprache $L(G)$ ist def:

$$L(G) = \{ w \in \Sigma^* \mid \boxed{S \Rightarrow_G^* w} \}.$$

Bsp. Gram. H : $L(H) = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$

Bsp. $F = (\{ S, S', S'', B, C \}, \{ a, b, c, d \}, P, S)$

$P = \{ S \to S'S'', \boxed{S' \to aS'C}, \boxed{S' \to aC}, \boxed{S'' \to BS''d}, \boxed{S'' \to Bd},$
$\boxed{CB \to BC}, \boxed{aB \to ab}, bB \to bb, Cd \to cd, Cc \to cc \}$

$S \Rightarrow_F S'S'' \Rightarrow_F aS'CS'' \Rightarrow_F aaCCS'' \Rightarrow_F aaCCBd$

$\Rightarrow_F aaCBCd \Rightarrow_F aaBCCd \Rightarrow_F aabCCd \Rightarrow aabCcd$

$\Rightarrow_F aabccd$

Beh: $L(F) = \{ a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 1 \}$

Bew:

(≥)

$S \Rightarrow_F^* S' S''$ 1. Regel

$\Rightarrow_F^* a^{n-1} S' C^{n-1} S''$ 2. Regel n-1 mal

$\Rightarrow_F^* a^n C^n S''$ 3. Regel 1x

$\Rightarrow_F^* a^n C^n B^{m-1} S'' d^{m-1}$ 4. Regel m-1 mal

$\Rightarrow_F^* a^n C^n B^m d^m$ 5. Regel 1 mal

$\Rightarrow_F^* a^n B^m C^n d^m$ 6. Regel n×m mal

$\Rightarrow_F^* a^n b B^{m-1} C^n d^m$ 7. Regel 1 mal

$\Rightarrow_F^* a^n b^m C^n d^m$ 8. Regel m-1 mal

$\Rightarrow_F^* a^n b^m C^{n-1} c d^m$ 9. Regel 1 mal

$\Rightarrow_F^* \underline{a^n b^m c^n d^m}$ 10. Regel n-1 mal

(⊆): 1. In jedem Ableitungsschritt ist die Anzahl der a's gleich der Anzahl der c's (groß und klein), und die Anzahl der b's ist gleich der Anzahl der d's (groß und klein).

2. a's können nur ganz links stehen und d's nur ganz rechts

3. Das Teilwort aus kleinen b's wird aus den Regeln 7-8 erzeugt. D.h. es kann keine kleinen b's rechts von c's haben. Das gilt entsprechend für die c's. D.h. die Worte müssen tatsächlich aufgebaut sein wie $a^x b^y c^z d^v$.

4. Mit 1: $x = z$ und $y = v$. $\square$

1.2 Chomsky-Hierarchie

Def (Chomsky-Hierarchie)

- Jede Grammatik ist Typ 0.
- Eine Grammatik ist vom Typ 1 (kontextsensitiv), falls für alle $w_1 \to w_2 \in P$ gilt: $|w_1| \leq |w_2|$.
- Eine Grammatik ist vom Typ 2 (kontextfrei), falls zusätzlich gilt, dass für alle Regeln $w_1 \to w_2 \in P$ gilt, dass $w_1 \in V$.
- Eine Grammatik ist vom Typ 3 (regulär), falls zusätzlich für jede Regel $w_1 \to w_2 \in P$ gilt: $w_1 \in V$, $w_2 \in \Sigma \cup \Sigma V$.

Eine Spr. ist vom Typ i falls es eine Gram. vom Typ i gibt, die die Sprache erzeugt.

Bem: Jede Spr. vom Typ i ist auch eine Sprache vom Typ i-1, für $i \geq 1$.

Bsp: F ist eine Typ 1 Gramm. ⇒ L(F) ist eine Typ 1-Spr.
Könnten wir F umschreiben, so dass es eine Typ 2-Gramm. wird?
H ist eine Typ 0-Spr. nach Def., aber keine Typ 1 oder 2 Spr. nach Def.

Bem: Wegen $|w_1| \leq |w_2|$ kann eine Spr. mit $\varepsilon \in L$ keine Typ 1-Spr. sein. Deshalb ex. die $\boxed{\varepsilon\text{-Sonderregel}}$: $S \to \varepsilon$ ist erlaubt falls S nie auf der rechten Seite auftaucht.

Umformulieren von H:

$H' = (\{S, S'\}, \{a, b\}, P', S)$

$P = \{\underline{S \to \varepsilon}, S \to S', S' \to ab, S' \to aS'b\}$

$L(H) = L(H') = \{\varepsilon\} \cup \{a^n b^n \mid n \geq 1\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Bem.: Oft will man in einer Typ 2 / Typ 3 - Grammatik ferner eine Regel der Art $\boxed{A \to \varepsilon}$ zulassen. Für jede Grammatik G mit $\varepsilon \notin L(G)$ können wir G' erzeugen, die ohne solche Regeln auskommt und $L(G) = L(G')$ (bei $\varepsilon \in L(G)$, dann ε-Sonderregel anwenden).

Bestimme alle $A \in V$ mit $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$. Dann erzeuge für jede Regel $\underline{B \to xAy}$ $(x, y \in (\Sigma \cup V)^*)$, die Regel $\underline{B \to xy}$. Danach lösche alle ε-Regeln.

Bsp

$S \to (A)$
$A \to BC$
$\boxed{B \to \varepsilon}$
$B \to b$
$\boxed{C \to \varepsilon}$
$C \to c$

$B \Rightarrow^* \varepsilon$
$C \Rightarrow^* \varepsilon$
$A \Rightarrow^* \varepsilon$

$\Longrightarrow$

$S \to (A)$
$S \to (\;)$
$A \to BC$
$A \to B$
$A \to C$
$B \to b$
$C \to c$

Bsp: Sprache in der Chomsky-Hierarchie

$L = \{ a^n b^m \mid n, m \geq 0 \}$ ist vom Typ 3

$L' = L(H) = \{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$ ist Typ 2, aber nicht vom Typ 3

$L'' = L(F) = \{ a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 1 \}$ ist Typ 1, aber nicht Typ 2

$(\quad [\quad) \quad]$

$L''' = \{ \varphi \mid \varphi$ ist eine allgemeingültige Formel der Prädikatenlogik der 1. Stufe $\}$ ist vom Typ 0, aber nicht vom Typ 1.

$\overline{L'''}$ ist nicht vom Typ 0!