# 0.8 Vollständige Induktion

Beh $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

IA: $n=1$ $\quad \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ ✓

IS: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \boxed{\sum_{k=1}^{n} k} + (n+1)$

$\overset{IV}{=} \boxed{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} + (n+1)$

$= \frac{n \cdot (n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$

$= \boxed{\frac{(n+2) \cdot (n+1)}{2}}$

## 0.9 Strukturelle Induktion

Bei Beweisen über syntaktischen Objekte kann man über die Größe einen Ind.-Beweis führen.
Oft einfacher, wenn man über den Aufbau den Beweis führt.

Bsp: Aussagenlogische Formeln

$A$ ist eine aussagenlog. Formel, falls $A$ eine Var. ist.

$(F \wedge F')$ — " — , falls $F$ und $F'$ aussagenlogische Formeln sind

$(F \vee F')$ — " — , — " —

$\neg F$ — " — , falls $F$ eine aussagenlog. Formel ist.

Beh. In jeder aussagenlog. Formel gibt es genauso viele öffnende wie schließende Klammern.

IA $G = A$, $A$ ist Var. ✓

IS Fall 1: $G = (F \wedge F')$, falls IV wahr ist für $F$ und $F'$, dann gilt sie auch für $G$.

Fall 2: $G = (F \vee F')$ genauso

Fall 3: $G = \neg F$, wahr falls IV für $F$ wahr. $\square$

Oft werden die Ind-Bew nicht explizit ausformuliert, sondern durch "..." angedeutet.

$\Sigma^*$ ist die Menge aller Worte über $\Sigma$

<u>Bsp</u> $\Sigma = \{a, b, c\}$

$\Sigma^* = \{\varepsilon, a, b, c, aa, ab, ac, ba, \dots\}$

<u>Def</u>

Gegeben zwei Worte $v, w \in \Sigma^*$, $v = x_1 x_2 \dots x_n$, $w = y_1 y_2 \dots y_m$, dann ist Konkatenation $v \underset{=}{\cdot} w = x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots y_m$.

<u>Bem</u>: Oft wird der Punkt weggelassen

<u>Bem</u>: $(\Sigma, \cdot)$ ist eine Halbgruppe mit neutr. El.

<u>Def</u>

$w^n = \underbrace{w \cdot w \cdot \dots \cdot w}_{n\text{-fach}}$ für $w \in \Sigma^*$, $n \in \mathbb{N}$ heißt das n-fache Produkt.

**Def**

$|w|$ ist die Länge des Wortes $w$ (Anzahl der Symbole im Wort)

**Bem** $|\varepsilon| = 0$

**Def**

Eine <u>formale Sprache</u> über dem Alphabet $\Sigma$ ist eine beliebige Teilmenge von $\Sigma^*$.

**Bsp** $\Sigma = \{a, b\}$

$L \subseteq \Sigma^*$ seien die Worte, in denen gleich viele a's und b's vorkommen

$L = \{\varepsilon, ab, ba, abba, aabb, baab, bbaa, abab, baba, \ldots\}$

__Bem__ Seien $L$ und $L'$ Sprachen über $\Sigma$. Dann sind $L \cap L'$, $L \cup L'$, $L - L'$, $\overline{L}$ auch formale Sprachen

$$L - L' = \{ w \in L \mid w \notin L' \}$$

$$\overline{L} = \Sigma^* - L$$

__Def__

Seien $L$ und $L'$ Sprachen über $\Sigma$, dann ist

$$L \cdot L' = \{ w \cdot w' \mid w \in L, w' \in L' \}$$

__Bsp__ $L = \{ \underline{ab}, \underline{a} \}$ $\quad L \cdot L' = \{ abac, abc, aac, ac \}$

$L' = \{ \underline{ac}, \underline{c} \}$

__Def__

Sei $L$ eine Spr. über $\Sigma$, dann ist das $n$-fache Produkt $L^n$ wie folgt def.:

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^n = L \cdot L^{n-1}$ für $n \geq 1$

---

$2^{\Sigma^*}$ $\quad \mathcal{P}(\Sigma^*)$

- abzählbar unendlich
- überabzählbar unendlich

Beh Für gegebenes $\Sigma$ gibt es überabzählbar viele Sprachen

Bew: Nehmen wir an, es gäbe nur abzählbar viele formale Sprache, d.h. es gibt eine Fkt $f: \mathbb{N} \to 2^{\Sigma^*}$, die surjektiv ist, d.h. wir können alle Sprachen durchnummerieren.

Wir können alle Worte von $\Sigma^*$ durchnummerieren

| | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | $w_4$ | $\dots$ | $w_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $L_1$ | $\ni$ | $\not\ni$ | $\ni$ | $\not\ni$ | $\dots$ | |
| $L_2$ | $\ni$ | $\ni$ | $\ni$ | $\ni$ | | |
| $L_3$ | $\not\ni$ | $\not\ni$ | $\not\ni$ | $\ni$ | | |
| $L_4$ | $\ni$ | $\ni$ | $\not\ni$ | $\ni$ | | |
| $\vdots$ | | | | | | |
| $L_j$ | | | | | | $\not\ni$ |
| $\vdots$ | | | | | | |

Cantorsche Diagonalisierung:

$$L^D = \{w_i \mid w_i \in L_i\}$$

$$\overline{L^D} = \{w_i \mid w_i \notin L_i\}$$

Für welches $j$ gilt: $L_j = \overline{L^D}$

1. Fall: $w_j \in L_j$
$\Rightarrow w_j \in L^D$
$w_j \notin \overline{L^D}$ Widerspruch

2. Fall: $w_j \notin L_j$
$\Rightarrow w_j \notin L^D$
$\Rightarrow w_j \in \overline{L^D}$
Widerspruch

$\Rightarrow$ überabzählbar viele Sprachen. □

Wie kann man nun unendliche Sprachen beschreiben

- mit endlichen Mitteln.

---

## 2.1.1 Grammatiken

- Terminalsymbole : $\Sigma$ (Alphabet)
- Variablensymbole : $V$ (Hilfssymbole)
- Startsymbol : $S \in V$
- Produktionsregeln: $LS \longrightarrow RS$

  mit der Bedeutung: wenn die LS als Substring auftaucht, darf sie durch die rechte Seite ersetzt werden.

Idee: Alle durch die Prod.-Regeln erzeugte Worte über $\Sigma$ gehören zur Sprache.

**Bsp:**

$\Sigma = \{a, b\}$

$V = \{S\}$

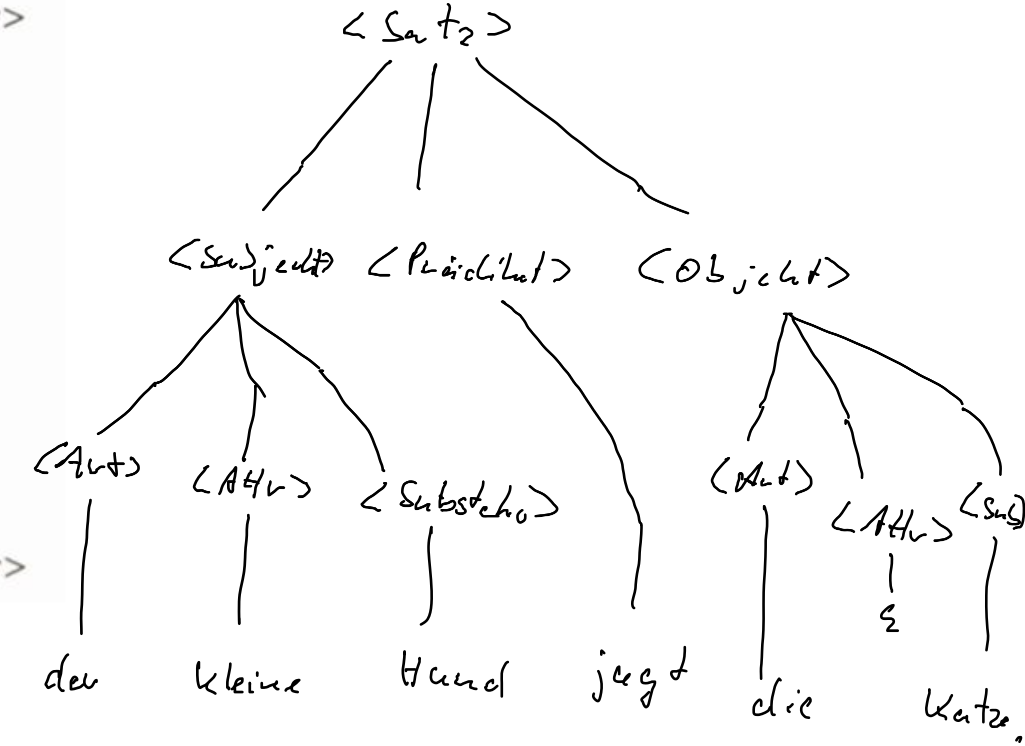
$S$ Startsymbol

$P = \{S \to \varepsilon,\ S \to \underline{ab},\ S \to \underline{ba},\ S \to SS,\ S \to \underline{a}S\underline{b},$
$S \to \underline{b}S\underline{a}\}$

$S \Rightarrow \varepsilon \qquad \varepsilon \in L$

$S \Rightarrow SS \Rightarrow bSaS \Rightarrow \underline{babaS} \Rightarrow \underline{bababa}$

| | | |
|---|---|---|
| <Satz> | → | <Subjekt> <Prädikat> <Objekt> |
| <Subjekt> | → | <Artikel> <Attribut> <Substantiv> |
| <Artikel> | → | $\varepsilon$ |
| <Artikel> | → | der |
| <Artikel> | → | die |
| <Artikel> | → | das |
| <Attribut> | → | $\varepsilon$ |
| <Attribut> | → | <Adjektiv> |
| <Attribut> | → | <Adjektiv> <Attribut> |
| <Adjektiv> | → | kleine |
| <Adjektiv> | → | bissige |
| <Adjektiv> | → | große |
| <Substantiv> | → | Hund |
| <Substantiv> | → | Katze |
| <Prädikat> | → | jagt |
| <Objekt> | → | <Artikel> <Attribut> <Substantiv> |




der kleine Katze jagt daie Hund