Theoretische Informatik

Uwe Schöning: Theoretische Informatik – kurz gefasst

Uwe Schöning: Mathe-Toolbox: Mathematische Notation, Grundbegriffe und Beweismethoden

Übungsgruppen!

Do: 12:15 – 14:00

Fr: 08:15 – 10:00

Warum?

→ Math. Grundlagen der Berechnung

→ wichtig, wenn Sie etwas neues entwickeln

Welche Themen?

→ Formale Sprachen und Maschinenmodellen
- konstruktiver Teil
- wichtig in allen Teilgebieten der Informatik

→ Berechenbarkeitstheorie
- welche Fkt. sind berechenbar
- Welche Probleme sind entscheidbar
- Welche Probleme sind nicht berechenbar

→ Komplexitätstheorie
- was heißt "effizient"?
- welche Probleme können wir nicht effizient berechnen?

Was sollen Sie lernen?

- konstruktive Methoden
  (Automaten / Sprachen)
- Beschreibung von Problemen in Termini der Berechenbarkeit
- Unmöglichkeitsergebnisse anwenden

Vorgehensweise

- Formalisieren
  → Reduktion auf math. Strukturen
- Aufstellen von Behauptungen / Sätze

- Beweise

→ Prinzipien verstehen

→ Techniken sind auch für die Programmierung wichtig.

0. Beweistechniken

Was ist ein Beweis?

- Herleitung einer Behauptung
  - Benutzen von Grundtatsache (Axiome)
  - Anwenden von Inferenzregeln

$$\frac{A, \quad A \Rightarrow B}{B}$$

Formales Kalkül = Axiome + Inferenzregel

Beweis = math. Objekte

In diesem formalen Sinne meist zu umständlich

In der Mathematik: Beweise auf abstrakterer Ebene

0.1 Direkter Beweis
(Definition Chasing)

→ Konsequente Anwendung von Definitionen

<u>Bsp</u>

<u>Beh</u>: Das Quadrat einer ungerade nat. Zahl ist ungerade

<u>Bew</u>: Sei n ungerade, d.h. es ex. $k \in \mathbb{N}$, so dass

$n = 2k+1$,

$$n^2 = (2k+1)^2 = \underline{4k^2 + 4k + 1} = \underbrace{2(\overbrace{2k^2+2k}^{\in \mathbb{N}}) + 1}_{\text{ist ungerade}}$$

$$a = b$$

$$a^2 = ab$$

$$2a^2 = a^2 + ab$$

$$2a^2 - 2ab = a^2 - ab$$

$$2a(a-b) = a(a-b)$$

$$2a = a$$

$$2 = 1$$

0.2 Indirekter Beweis

Wir wollen zeigen, dass $A \Rightarrow B$.

Man nimmt $\neg B$ und leitet $\neg A$ her: $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Wir wollen zeigen, dass aus $A \wedge \neg B$ ein Widerspruch folgt (unter der Voraussetzung, dass A wahr ist)

$\rightarrow$ d.h. B muß wahr sein!

<u>Bsp</u>

<u>Beh.</u> <u>$\sqrt{2}$ ist nicht rational</u>

<u>Bew</u> $\boxed{\text{Wir nehmen an, } \sqrt{2} \text{ ist rational.}}$ D.h. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ und p und q sind <u>teilerfremd</u>,

$2 = \frac{p^2}{q^2}$, d.h. $p^2 = 2q^2$. D.h. es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $p = 2k$, d.h. $(2k)^2 = \cancel{4}k^2 = \cancel{2}q^2$, $2k^2 = q^2$, also auch q enthält 2 als Primfaktor. Widerspruch!

0.3 Fallunterscheidung

Teile Wertebereich geeignet auf, beweise Einzelteile, setze Ergebnis.

<u>Bsp.</u>

<u>Beh.</u> $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil = n$

Fall 1: n ist gerade $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n}{2}$, d.h. die Beh stimmt!

Fall 2: n ist ungerade: $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$, $\lceil \frac{n}{2} \rceil = \frac{n+1}{2}$, d.h. die Beh stimmt auch

$\rightarrow$ alle Fälle abgedeckt $\Rightarrow$ wir sind fertig $\square$

0.4 Äquivalenzbeweise

Oft wollen wir Aussagen machen wie

A gdw. B

Dann zeigt man

$A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

Oft auch bei Mengen

Oft auch zyklisch: $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, $C \Rightarrow A$, dann sind alle 3 Aussagen äquivalent

Bsp Die Menge der von endlichen Automaten akzeptierten Sprachen ist identisch mit der Menge der Typ 3-Sprachen.

Bew: Wir konstr. zu jedem Autom. eine Typ 3-Spr. und umgekehrt.

0.5 Bew. durch Konstruktion

Wir konstruieren ein math. Objekt, dass die gewünschte Eigenschaft hat!

<u>Bsp</u>

<u>Beh</u>: Eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform mit je ~~mind.~~ einem negativen Literal pro Klausel erfüllbar.

__Bew__: Konstruiere eine Belegung der Var die jede Klausel wahr macht: Belege alle Variablen mit "falsch". Dann enthält jede Klausel ein erfüllendes Literal. $\square$

0.6. Bew. durch Verschärfung

Statt A beweisen wir B, wobei $B \Rightarrow A$ gilt.

Floskel: "Es genügt zu zeigen ..."

__Bsp__:

__Beh__: $x^2 + \sin(x) \leq (x+1)^2 - \cos(x)$ $\boxed{\text{für } x \geq \frac{1}{2}}$

$$x^2 + \sin(x) \leq x^2 + 1 \leq (x+1)^2 - 1 \leq (x+1)^2 - \cos(x)$$

Es soll gelten $x^2+1 \leq (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1$

$$\cancel{x^2} + 1 \leq \cancel{x^2} + 2x$$

$$1/2 \leq x$$

0.7. Bew. durch Abschwächung

Klausel: "OBdA" Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

<u>Bsp</u>: Gegeben drei nat. Zahlen a, b, c. OBdA. $a \leq b \leq c$

0.8. Induktionsbew.

Zu zeigen $A(n)$, $\forall n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$

Dazu zeigt man $A(n_0)$ (Induktionsanfang IA).

Dann zeigt man den Induktionsschritt (IS)

$$A(n) \rightarrow A(n+1), \quad \forall n \geq n_0$$

<u>Bsp</u>

<u>Beh</u> $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (kleiner Gauß) - 55741

Ur^7-Großvater