Informatik III:
Theoretische Informatik

Prof. Bernhard Nebel
Dr. Christian Becker-Asano, Moritz Göbelbecker

Wintersemester 2012/13
Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 13

Abgabe: 04. Februar 2013

Aufgabe 13.1 (Universelle Turingmaschine; 1.5+1.5+1.5 Punkte)

Eine Turingmaschine U mit Eingabealphabet $\{0, 1, \#\}$ heißt *universell*, falls U nur Eingaben der Form $w\#x$ mit $w, x \in \{0, 1\}^*$ akzeptiert und für jedes solche Wort $w\#x$ genau dasselbe Wort berechnet wie M_w angesetzt auf das Wort x.

(a) Beschreiben Sie die Arbeitsweise einer universellen Turingmaschine in Form eines Algorithmus. Erläutern Sie kurz, warum die von Ihnen beschriebene Maschine universell ist.

(b) Die *universelle Sprache* L_u ist definiert als die Sprache

$$L_u = \{\, w\#v \in \{0, 1, \#\}^* \;:\; M_w \text{ akzeptiert } v\}.$$

Beweisen Sie, dass L_u rekursiv aufzählbar ist, indem Sie zeigen, dass die von einer universellen Turing-Maschine akzeptierte Sprache gerade die universelle Sprache L_u ist.

(c) Ist L_u entscheidbar? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Aufgabe 13.2 (Codierung von Graphen; 1.5 + 1 Punkte)

Ein gerichteter Graph G ist gegeben durch eine Menge von Knoten V und einer Teilmenge $E \subseteq V \times V$ von gerichteten Kanten. Ein gerichteteter Graph mit Kantenbewertung ist ein gerichteter Graph zusammen mit einer Funktion, die jeder Kante $e \in E$ eine Zahl $k(e) \in \mathbb{N}$ zuordnet.

(a) Geben Sie eine Repräsentation von gerichteten Graphen über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ an. Zeigen Sie, dass Ihre Repräsentation eine Codierung ist, d.h., dass zwei unterschiedlichen Graphen unterschiedliche Wörter über Σ zugeordnet werden. Geben Sie ferner eine obere Abschätzung der Länge des Wortes an, die einen Graphen mit Knotenmenge V und Kantenmenge E codiert.

(b) Geben Sie analog zu (a) eine Codierung von gerichteten Graphen mit Kantenbewertung über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ an (ohne Beweis). Geben Sie ferner eine Abschätzung der Codierungslänge in Abhängigkeit von V, E und k an.

Hinweis: Graphen können als Adjazenz-Matrizen dargestellt werden.

Aufgabe 13.3 (Entscheidungsprobleme für Graphen; 1.5 + 1.5 Punkte)

Ein *ungerichteter* Graph $G = \langle V, E\rangle$ ist gegeben durch eine nicht leere Menge V (*Knoten*) und einer Menge E von zweielementigen Teilmengen von V (*Kanten*). Ein *Pfad* (der Länge k) ist eine Folge von Kanten $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\} \in E$. Man bezeichnet dann v_0 als Start- und v_k als Endknoten des Pfades. Ein Graph heißt *zusammenhängend*, falls zwischen je zwei verschiedenen Knoten ein Pfad in G existiert.

Eine *Clique* ist eine Teilmenge $C \subseteq V$, derart dass für je zwei verschiedene $v, v' \in C$ gilt $\{v, v'\} \in E$.

Wir betrachten die folgenden beiden Entscheidungsprobleme für Graphen.

ZUSAMMENHANG: Gegeben ein ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$. Ist G zusammenhängend?

CLIQUE: Gegeben ein ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$ sowie $k \in \mathbb{N}$. Besitzt G eine Clique C mit $|C| \geq k$?

Geben Sie für jedes Problem eine geeignete Codierung an. Formulieren Sie jeweils einen deterministischen Algorithmus, der das Problem löst, und geben Sie eine obere Abschätzung der Laufzeit Ihres Algorithmus in Abhängigkeit von der Eingabe an. Welche Probleme sind in P, welche in NP (Begründung)?