

Übungsblatt 10  
**Abgabe: 14. Januar 2013**

**Aufgabe 10.1** (Fleißige Looper; 1+1+1+2+2 Punkte)

Neben der Ackermann-Funktion ist die folgende Funktion  $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ein Beispiel für eine totale Funktion, die nicht LOOP-berechenbar ist. Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $b(n)$  der maximale Wert, den ein LOOP-Programm berechnen kann, dessen Länge höchstens  $n + 1$  ist:

$$b(n) := \max\{res(P) : P \text{ ist ein LOOP-Programm mit } l(P) \leq n + 1\}.$$

Hierbei bezeichne  $res(P)$  den Wert der Variable  $x_0$ , den  $P$  berechnet, wenn jede in  $P$  vorkommende Variable mit 0 vorbelegt ist und wir einschränkend davon ausgehen, dass in LOOP-Programmen nur Wertzuweisungen der Formen  $x_i := 0$ ,  $x_i := x_j$  oder  $x_i := x_j + 1$  vorkommen. Die Länge eines LOOP-Programms,  $l(P)$ , ist dann wie folgt rekursiv definiert:  $l(P) = 1$ , falls  $P$  eine Wertzuweisung ist;  $l(P) = l(P_1) + l(P_2)$ , falls  $P$  ein LOOP-Programm der Form  $P_1 ; P_2$  ist; und  $l(P) = l(P') + 1$ , falls  $P$  eine LOOP-Anweisung der Form LOOP  $x_i$  DO  $P'$  END.

- (a) Zeigen Sie, dass in jedem LOOP-Programm  $P$  höchstens  $2 \cdot l(P)$  verschiedene Variablen vorkommen.
- (b) Ist die Funktion  $b$  intuitiv berechenbar? Begründen Sie Ihre Behauptung.
- (c) Zeigen Sie, dass  $b$  streng monoton wächst, d.h., dass für beliebige  $n < m$  gilt  $b(n) < b(m)$ .
- (d) Zeigen Sie, dass für beliebige  $n$  die Abschätzung  $b(n + 2) \geq n \cdot 2^n$  gilt.
- (e) Zeigen Sie, dass  $b$  nicht LOOP-berechenbar ist (*Hinweis*: Betrachten Sie LOOP-Programme der Länge  $\geq 6$  und benutzen Sie die untere Abschätzung aus (d)).

**Aufgabe 10.2** (Ganzzahlige Division mit Rest; 3 Punkte)

In Aufgabe 9.1 haben wir "modifizierte" zweistellige Funktionen DIV und MOD für die ganzzahlige Division mit Rest eingeführt, die eine Division durch 0 erlaubten. In dieser Aufgabe sei die Division durch 0 wieder (wie sonst üblich) undefiniert. Definieren Sie DIV und MOD als  $\mu$ -rekursive Funktionen.