Informatik III:
Theoretische Informatik

Prof. Bernhard Nebel
Dr. Christian Becker-Asano, Moritz Göbelbecker

Wintersemester 2012/13
Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 8

Abgabe: 17. Dezember 2012

Aufgabe 8.1 (Kontextsensitive Grammatik; 2+2 Punkte)
Sei $L = \{a^n b^{n+1} c^n | n \geq 0\}$. Zeigen Sie, dass:

(a) L nicht kontextfrei ist.

(b) L kontextsensitiv ist, indem Sie eine Grammatik für L angeben.

Aufgabe 8.2 (Deterministisch-Kontextfreie Sprachen; 2 Punkte)
$L = \{a^n b^l c^n | n, l \geq 1\} \cup \{a^n b^n \; | n \geq 1\}$ ist eine nicht deterministisch-kontextfreie Sprache.

Zeigen Sie, dass die deterministisch kontextfreien Sprachen nicht gegenüber Umkehrung abgeschlossen sind (d.h aus L det. kontexfrei folgt nicht, dass L^R det. kontextfrei ist).

Aufgabe 8.3 (Turingmaschine, Berechnung einfacher Funktionen; 1+1.5+1.5 Punkte)
In dieser Aufgabe sollen Turingmaschinen konstruiert werden, die die folgenden einfachen numerischen Funktionen berechnen. Wir verwenden dazu das Alphabet $\Sigma = \{|, \#\}$, um die jeweilige Eingabe zu codieren. Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird durch n Striche dargestellt. Das Symbol # wird benutzt, um zwei Zahlen voneinander zu trennen. Konstruieren Sie für die folgenden Funktionen jeweils eine deterministische Turingmaschine $M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \Box, E \rangle$, die die jeweilige Funktion berechnet: angesetzt auf die Eingabe, stoppt sie in einem Endzustand mit dem korrekten Ergebnis auf dem Band, wobei der Schreib-Lesekopf von M sich wieder über dem ersten nicht-leeren Zeichen befindet (d.h. M stoppt in einer Konfiguration der Gestalt $\Box \ldots \Box \, z \, | \ldots | \Box \ldots \Box$ mit $z \in E$; H_M bezeichne dann das Wort, das auf dem Band steht, wenn M stoppt).

(a) Addition zweier Zahlen (z.B. $H_M(|\#||) = |||$);

(b) Subtraktion einer Zahl von einer größeren Zahl (z.B. $H_M(|||\#||) = |$);

(c) Zwei Kopien einer eingegebenen Zahl, die durch # voneinander getrennt sind (z.B. $H_M(||) = ||\#||$);

Geben Sie die jeweiligen Turingmaschinen in Form eines Flussdiagramms an. Sie dürfen dazu die Turingmaschinen a, l, r, $\mathcal{R}$ und $\mathcal{L}$ verwenden (siehe Erläuterungen auf der Rückseite).

Flussdiagramm-Darstellung für Turingmaschinen: Um die Übergangsfunktion von Turingmaschinen (TM) kompakt darzustellen, führen wir sogeannnte Flussdiagramme ein. Ausgehend von elementaren TM lassen sich dann komplexere TM zusammensetzen. Man beschränkt sich hierbei auf die Darstellung der Ausführungsschritte der Teil-TM (insbesondere werden die einzelnen Zustände nicht konkret benannt). Wir nehmen im Folgenden an, dass alle konstruierten TM genau einen *Endzustand* besitzen. Ferner sei $\Gamma = \{a_0, \ldots, a_n\}$ das Bandalphabet.

- Kleine Rechtsmaschine r: geht einen Schritt nach rechts und hält dann.

  Turingtafel: $$\begin{array}{c cc|ccc} r & z_0 & a_0 & z_e & a_0 & R \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & z_0 & a_n & z_e & a_n & R \end{array}$$

- Kleine Linksmaschine l: geht einen Schritt nach links und hält dann.

  Turingtafel: $$\begin{array}{c cc|ccc} l & z_0 & a_0 & z_e & a_0 & L \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & z_0 & a_n & z_e & a_n & L \end{array}$$

- Druckmaschine a für $a \in \Gamma$: schreibt das Symbol a auf das Band und hält dann.

  Turingtafel: $$\begin{array}{c cc|ccc} a & z_0 & a_0 & z_e & a & S \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & z_0 & a_n & z_e & a & S \end{array}$$

- Zusammensetzungen:

$M_1 \xrightarrow{a} M_2$	bedeutet, dass zuerst M_1 arbeitet. Hält M_1 auf einem Feld mit dem Symbol a an, wird M_2 gestartet.
$M_1 \longrightarrow M_2$	bedeutet, dass zuerst M_1 arbeitet. Sobald M_1 anhält, wird M_2 gestartet.
$M_1 M_2$	ist eine Abkürzung für $M_1 \longrightarrow M_2$.
$M_1 \xrightarrow{\neq a} M_2$	bedeutet, dass zuerst M_1 arbeitet. Hält M_1 auf einem Feld mit dem Symbol $\neq a$ an, wird M_2 gestartet.

Aus gegebenen TM können Flussdiagramme aufgebaut werden. Die Knoten dieser Flussdiagramme sind mit den Namen der TM bezeichnet. Die Kanten werden durch Pfeile der Form $\xrightarrow{a}$, $\longrightarrow$ oder $\xrightarrow{\neq a}$ bezeichnet. Schleifen sind erlaubt. Eine der TM im Flussdiagramm ist durch einen Pfeil $\longrightarrow M$ als Start-TM gekennzeichnet.

Beispiele: Die große Rechtsmaschine $\mathcal{R}$ (links dargestellt) geht einen Schritt nach rechts und anschließend so lange weiter nach rechts, bis sie ein $\Box$ liest (die große Linkmaschine $\mathcal{L}$ ist analog definiert). Die rechts dargestellte TM geht zunächst einen Schritt nach links; steht dort kein a, so geht sie einen Schritt nach rechts, druckt a und geht danach nach rechts, bis sie ein $\Box$ liest:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & r \arrow[loop above, "\neq \Box"] \end{tikzcd} \qquad\qquad \longrightarrow l \xrightarrow{\neq a} raR$$