Informatik III:
Theoretische Informatik

Prof. Bernhard Nebel
Dr. Christian Becker-Asano & Moritz Göbelbecker

Wintersemester 2012/13
Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 2

Abgabe: 05. November 2012

Hinweis zur Abgabe per Email: Senden Sie Ihre Lösungen bitte bis Montags, 14 Uhr an *basano@informatik.uni-freiburg.de* (Nicht direkt an ihre Tutoren, wie auf dem letzten Übungsblatt angegeben) .

Aufgabe 2.1 (Rechnen mit Sprachen; je Teilaufgabe 0.5 Punkte)
Im Folgenden seien L, L_1, L_2, L_3 Sprachen über demselben Alphabet Σ. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Benennen Sie jeweils auch das Verfahren, das Sie zum Nachweis Ihrer Behauptung verwenden.

(a) $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$

(b) $(L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$

(c) $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$

(d) $(L_1 \cdot L_2)^R = L_2^R \cdot L_1^R$

(e) Ist $L_1 \subseteq L_2$, so gilt auch $L/L_1 \subseteq L/L_2$.

(f) $(L_1/L_2) \cdot L_2 = L_1$

Aufgabe 2.2 (Kleene-Abschluss; 1+3 Punkte)
Beweisen Sie:

(a) Der Kleene-Abschluss ist unter Konkatenation abgeschlossen, d.h. $L^* \cdot L^* \subseteq L^*$.

(b) Sei L eine reguläre Sprache, dann ist auch L^* regulär. Konstruieren sie dazu für eine beliebige reguläre Grammatik G eine neue reguläre Grammatik G^*. Zeigen Sie dann durch Induktion über n dass jedes $w \in L^n$ in G^* ableitbar ist. Zeigen Sie außerdem durch Induktion über die Länge aller möglichen Ableitungen, dass falls ein Wort w in G^* ableitbar ist, $w \in L^*$.

Aufgabe 2.3 (Kontextfreie Grammatiken; 1+1+1 Punkte)
Die Grammatik G über einem Alphabet Σ und dem Startsymbol S ist durch die folgenden Produktionsregeln gegeben:

$$\begin{aligned} &S \to \varepsilon \\ &S \to x && x \in \Sigma \\ &S \to xSx && x \in \Sigma \end{aligned}$$

Die Sprache $L_n = \{w \in L(G) : |w| = n\}$ bezeichne die Menge aller Worte der Länge n der von G erzeugten Sprache $L(G)$.

(a) Geben Sie eine rekursive Definition der Mengen L_n an.

(b) Beweisen Sie dass $w \in L(G) \Leftrightarrow w^R \in L(G)$.

(c) Beweisen Sie durch Induktion über n, dass $|L_n| = |\Sigma|^{\lceil n/2 \rceil}$ gilt (hierbei bezeichne $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geq x$).

Definitionen und Hinweise: Der *Kleene-Abschluss* einer Sprache L ist wie folgt definiert: $L^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$. Für die *positive Hülle* gilt $L^+ := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} L^n$. Die *Quotientensprache* zweier Sprachen L und L' über demselben Alphabet Σ ist definiert durch: $L/L' := \{\, w \in \Sigma^* : \text{es gibt ein } u \in L' \text{ derart, dass } wu \in L \}$. Ist w ein Wort einer Sprache L, so bezeichne w^R das Wort, das man erhält, wenn man w rückwärts schreibt, d.h., ist $w = x_1 \dots x_n$ mit $x_1, \dots, x_n \in \Sigma$, so ist $w^R = x_n \dots x_1$. Offensichtlich ist $\varepsilon^R = \varepsilon$ und $x^R = x$ für jedes $x \in \Sigma$. L^R ist dann definiert durch $L^R := \{\, w^R \in \Sigma^* : w \in L \}$. Eine Sprache heißt *endlich*, wenn sie (als Mengen gesehen) endlich viele Elemente besitzt.