Satz Die Fkt Σ ist nicht Turing-berechenbar.

Bew Wir zeigen, dass für eine bel. Tb-Fkt f ein n_0 existiert, so dass für $n \geq n_0$ $\Sigma(n) > f(n)$.

Sei f eine bel Tb-Fkt. Definiere $F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{x} \left(f(i) + i^2 \right) \longleftarrow$$

Damit gilt:

$$F(x) > F(y) \quad \text{für alle } x > y$$

$$F(x) \geq x^2$$

$$F(x) \geq f(x)$$

Betrachte mTM M, die x 1en auf's leere Band schreiben und dann auf die linkste 1 fahre. Das kann man mit $x+1$ Zustände machen. M_F sei die mTM, die F berechnet. Die habe n Zustände.

$$\text{start} \to M \to M_F \to M_F \to \text{stop}$$

Diese Maschine braucht $x+1+2n$ Zustände und schreibt $F(F(x))$ 1en auf's Band.

Eine Busy-Beaver-TM mit $x+1+2n$ Zuständen schreibt mind. so viele 1en auf's Band, d.h.

$$\Sigma(x+1+2n) \geq F(F(x))$$

Da es c_0 gibt, sodass $x^2 > x+1+2n$ für alle $x \geq c_0$, folgt für alle $x \geq c_0$:

$$\underline{\Sigma(x+1+2n)} \geq F(\underline{F(x)}) \geq F(\underline{x^2}) \underline{\underline{>}} F(\underline{x+1+2n}) \geq \underline{f(x+1+2n)}$$

Σ wächst schneller als jede Tb-Fkt. $\square$

3.9 Grammatik-Probleme und Unentscheidbarkeit

Satz: Gegeben 2 kf Gram. G_1 und G_2, dann sind die folgende Fragestellungen unentscheidbar:

(1) Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?

(2) Ist $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty$

(3) Ist $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei?

(4) Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

(5) Ist $L(G_1) = L(G_2)$?

$K = ((\overset{x_1}{010}, \overset{y_1}{11}), (\overset{x_2}{111}, \overset{y_2}{1}))$

Bew Durch Reduktion vom PCP auf das jeweilige Problem.

Jedem PCP $K = ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$ über dem Alphabet $\{0,1\}$ ordnen wir 2 (deterministische) kf. Gram G_1 und G_2 über $\Sigma = \{0, 1, \$, a_1, \ldots, a_k\}$ zu.

G_1:

$$S \to A\,\$\,B$$

$$A \to a_1 A x_1 \mid a_2 A x_2 \mid \ldots \mid a_k A x_k$$

$$A \to a_1 x_1 \mid a_2 x_2 \mid \ldots \mid a_k x_k$$

$$B \to \tilde{y}_1 B a_1 \mid \tilde{y}_2 B a_2 \mid \ldots \mid \tilde{y}_k B a_k$$

$$B \to \tilde{y}_1 a_1 \mid \boxed{\tilde{y}_2} a_2 \mid \ldots \mid \tilde{y}_k a_k$$

Übereinstimmung von Indizes wir werden

$a_i - x_i$

$a_j - y_j$

wobei $\tilde{w}$ das Spiegelwort von w ist.

$$L(G_1) = L_1 = \{ a_{i_n} a_{i_{n-1}} \ldots a_{i_2} a_{i_1} \boxed{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-1}} x_{i_n} \$} \boxed{\tilde{y}_{j_m} \tilde{y}_{j_{m-1}} \ldots \tilde{y}_{j_2} \tilde{y}_{j_1}} a_{j_1} a_{j_2} \ldots a_{j_{m-1}} a_{j_m} \mid n, m \geq 1, i_n, j_m \in \{1, \ldots, k\} \}$$

G_2:

$$S \to a_1 S a_1 \mid a_2 S a_2 \mid \ldots \mid a_k S a_k \mid T$$

$$T \to 0T0 \mid 1T1 \mid \$$$

$$L(G_2) = L_2 = \{ u v \$ \tilde{v} \tilde{u} \mid u \in \{a_1, \ldots, a_k\}^*, v \in \{0, 1\}^* \}$$

Nun gilt:

k hat eine Lösung $\boxed{i_1, \dots, i_n}$

gdw

$$a_{i_1} \cdots a_{i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n} \$ y_{i_n} \cdots y_{i_1} a_{i_1} \cdots a_{i_n} \in \boxed{L_1 \cap L_2}$$

D.h. $f(k) = (G_1, G_2)$ ist eine Reduktion von PCP auf (1).

Zu (2): Wenn $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, dann muss $L_1 \cap L_2$ unendlich viele Elemente enthalten, da wenn k eine Lösung, k unendl. viele Lösungen besitzt.

Zu (3): Wenn $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, dann ist $L_1 \cap L_2$ kf. Wenn $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, dann sind es Worte $uv\$\tilde{v}\tilde{u}$. Durch Anwendung des Pumping-Lemmas sieht man, dass $L_1 \cap L_2$ dann nicht kf ist.

Zu (4+5): Da G_1 und G_2 det kf Sprachen beschreiben, kann man effektiv det kf Gramm. konstr. G_1' und G_2' mit $L(G_1') = \overline{L_1}$ und $L(G_2') = \overline{L_2}$.

Sei G_3 Gram. mit $L(G_3) = L(G_1) \cup L(G_2')$.
Effektiv konstruierbar (nicht notwendig det.)

$\underline{L_1 \cap L_2 = \emptyset}$ $\underline{\text{gdw}}$ $\underline{L_1} \subseteq \overline{L_2} = \underline{L(G_2')}$ (4)

$\underline{\text{gdw}}$ $L_1 \cup L(G_2') = L(G_2')$

$\underline{\text{gdw}}$ $\underline{\underline{L(G_3) = L(G_2')}}$ (5) □

<u>Bem:</u> Unentscheidbarkeit der Äquivalenz gilt dann natürlich für alle Formalismen, mit denen man kf Gram. beschreiben kann: PDA, BNF, EBNF, LBAs, Typ 1-Gram., TMs, ...

<u>Satz</u> Gegeben 2 <u>det</u> kf Sprachen L_1 und L_2. Dann ist unentscheidbar:

(1) $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

(2) $|L_1 \cap L_2| = \infty$?

(3) $L_1 \cap L_2$ kf?

(4) $L_1 \subseteq L_2$?

<u>Bew:</u> Folgt aus obigen Bem. □