Lemma $MPCP \leq PCP$

Bew: $\acute{w} = \#a_1\#a_2\#\ldots\#a_m \qquad w = a_1\ldots a_m$

$\grave{w} = a_1\#a_2\#\ldots\#a_m\#$

$$K = (\overset{1}{(x_1, y_1)}, \ldots, \overset{k}{(x_k, y_k)})$$

$$f(K) = (\underset{0}{(\#\grave{x}_1, \acute{y}_1)}, (\grave{x}_1, \acute{y}_1), \ldots, (\grave{x}_k, \acute{y}_k), \underset{k+1}{(\$, \#\$)})$$

"$\Rightarrow$": $(1, i_2, \ldots, i_n)$ ist Lösung für MPCP, dann ist $(0, i_2, \ldots, i_k, k+1)$ eine Lösung des PCP

"$\Leftarrow$": Sei $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ eine Lösung des PCP $f(K)$.

OBdA sei die Lösung nicht verkürzbar.

Zu zeigen: $(1, i_2, \ldots, i_{n-1})$ eine Lösung des MPCP K ist.

__Beobachtungen:__

(a) Nur $(\#\grave{x}_1, \acute{y}_1)$ beginnt mit gleichem Zeichen $(\#)$.

$\rightarrow i_1 = 0$

(b) Nur $(\$, \#\$)$ endet mit dem gleichen Zeichen $(\$)$

$\rightarrow i_n = k+1$

(c) Nur $(\#\grave{x}_1, \acute{y}_1)$ ist einziges Tupel mit x-Wert, das mit $\#$ beginnt

$\rightarrow i_j \neq 0$ für $j \geq 2$ (da sonst $\#\#$ im x-String)

(d) $\$$ kommt nur in $(\$, \#\$)$ vor

$\rightarrow i_j \neq k+1$ für $j < n$

D.h.

$$\#\grave{x}_1 \grave{x}_{i_2} \cdots \grave{x}_{i_{n-1}} \$ = \acute{y}_1 \acute{y}_{i_2} \cdots \acute{y}_{i_{n-1}} \#\$$$

streichen von $\#$ und $\$$:

$$x_1 x_{i_2} \cdots x_{i_{n-1}} = y_1 y_{i_2} \cdots y_{i_{n-1}}$$

D.h. $(1, i_2, i_3, \ldots, i_{n-1})$ ist eine Lösung für K. ◻

<u>Lemma</u> $H \leq MPCP$

<u>Bew</u>: Gegeben <u>Codierung</u> einer TM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$
und Eingabewort $w \in \Sigma^*$. konstr. MPCP
$K = ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k))$, so dass

M angesetzt auf w hält
<u>gdw</u>
K hat Lösung mit $i_1 = 1$

MPCP über Alphabet $\Gamma \cup Z \cup \{\#\}$, wobei $\# \notin \Gamma \cup Z$.

Konstruiere folgende Paare für K:

$x = \# z_0 a_1 a_2 \ldots a_k \#$

$y = \# z_0 a_1 a_2 \ldots a_k \# z_1 b a_2 \ldots a_k \#$

$\delta(z_0, a_1) = (z_1, b, R)$

Initialpaar

$(\#, \# z_0 w \#)$ mit Index 1!

Kopierpaare:

(a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\#\}$

Überführungspaare

$(za, z'c)$ falls $\delta(z,a) = (z', c, N)$

(za, cz') falls $\delta(z,a) = (z', c, R)$

$(bza, z'bc)$ falls $\delta(z,a) = (z', c, L)$

$(\# za, \# z' \Box c)$ falls $\delta(z,a) = (z', c, L)$

$(z\#, z'c\#)$ falls $\delta(z,\Box) = (z', c, N)$

$(z\#, cz'\#)$ falls $\delta(z,\Box) = (z', c, R)$

$(bz\#, z'bc\#)$ falls $\delta(z,\Box) = (z', c, L)$

Löschpaare:

$(a z_e, z_e)$
$(z_e a, z_e)$ für alle $a \in \Gamma$, $z_e \in E$

Abschlusspaare:

$(z_e \#\#, \#)$ für alle $z_e \in E$

OBdA aus Endzuständen gibt es keine abgehenden Kanten.

Stoppt M auf w, so ex. Konfigurationsfolge $(k_0, k_1, \dots, k_t)$ mit $k_0 = z_0 w$ und k_t ist Endkonf ($k_t = u z_e v$ $u, v \in \Gamma^*$, $z_e \in E$) und $k_i \vdash k_{i+1}$.

Dann ex. Lösungswort für MPCP:

$\# k_0 \# k_1 \# \dots \# k_t \# k_t' \# k_t'' \# \dots \# z_e \#\#$

Umgekehrt: Ex. eine Lsg des MPCP, dann kann daraus eine Rechnung der TM M abgeleitet werden. D.h. angegebene Fkt. (die, die Paare erzeugt hat) ist eine Reduktion von H auf MPCP. □

Satz PCP ist unentscheidbar.

Bew Da $H \leq MPCP$ und $MPCP \leq PCP$ und $\leq$ transitiv ist und da H unentscheidbar ist, muß auch PCP unentscheidbar sein.

$\square$

Bem: H ist semi-entscheidbar!

Bem: TMs, die andere TM simulieren, nennt man universelle TM U.

Satz PCP ist bereits über dem Alphabet $\{0,1\}$ unentscheidbar.

Aussage: PCP über $\{1\}$ ist entscheidbar.

~~Bew~~: Nehme erste Paar $(1^k, 1^l)$ $k>l$ $(1^x, 1^y)$ $x<y$.

Bew-Skizze:

Bew: PCPs über $\{0,1\}$ heißen 01-PCP. Wir zeigen

PCP $\leq$ 01-PCP. Sei $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ das Alphabet

des PCPs. Jedem $a_j \in \Sigma$ ordnen wir $\hat{a}_j = 01^j$.

Für $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$ sei $\hat{w} = \hat{a}_1 \hat{a}_2 \dots \hat{a}_n \in \{0,1\}^*$.

Offensichtlich:

$(x_1, y_1) \dots (x_k, y_k)$ ist Lösung des PCP

$\underline{\text{gdw}}$

$(\hat{x}_1, \hat{y}_1) \dots (\hat{x}_k, \hat{y}_k)$ ist Lösung des 01-PCP $\square$

Bem: Sei PCP_k die Variante mit k Paare.

PCP_k mit $k \geq 9$ ist unentscheidbar, $k \leq 2$ ist PCP_k entscheidbar.

3.8 Busy Beaver TMs

Wir betrachten spezielle minimale TMs (mTM):

$\Sigma = \{1\}$, $\Gamma = \{\square, 1\}$, $E = \{z_e\}$

$\delta : (Z - E) \times \Gamma \to Z \times \Gamma \times \{L, R\}$

Berechenbarkeit für diese TMs:

Eine Fkt $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt Turing-berechenbar, falls es eine det. mTM gibt so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(n) = m$$
$$\text{gdw}$$
$$z_0 1^n \vdash z_e 1^m$$

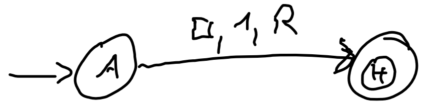
Die Rado-Fkt. $\Sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist wie folgt def:

Es ist die maximale Anzahl von 1en auf dem Band einer TM mit n Nichtend-Zuständen nach dem Halten, wenn die TM auf dem leeren Band gestartet wurde.
(1en müssen nicht konsekutiv sein)

Die TM, die maximale Anzahl von 1en bei gegebenem n schreibt, heißt "Busy Beaver".

Bsp

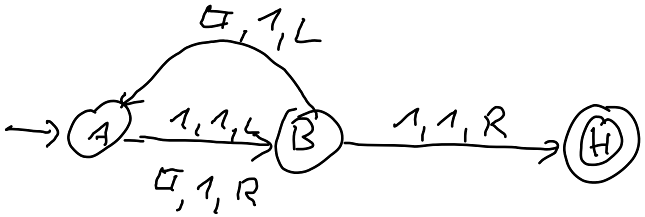
für $n = 1$ $\qquad \Sigma(1) = 1$



$$\underset{A}{\underset{\uparrow}{\square}} \vdash 1\underset{H}{\underset{\uparrow}{\square}}$$

für $n = 2$

2 3 4 5 6
4 0



□	1 □	1 1	□ 1 1	□ 1 1 1	1 1 1 1	1 1 1 1
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
A	B	A	B	A	B	H

n	$\Sigma(n)$
1	1
2	4
3	6
4	13
5	≥ 4098
6	$\geq 3{,}5 \times 10^{\underline{18267}}$
7	

10^{77}