Das Halteproblem

Gegeben: Eine Codierung einer TM M code(M) und ein Eingabewort.

Gefragt: Hält M auf Eingabe w?

$$H = \{ (\text{Code}(M), \underline{w}) \mid M \text{ hält auf der Eingabe } w \}$$

Codierung von TMs

Sei $\Gamma = \underline{\{a_0, \dots, a_k\}}$

$Z = \underline{\{z_0, \dots, z_n\}}$

Jede δ-Regel $\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, y)$ kann codiert werden durch

$$w_{i,j,i',j',y} = \underline{\#\# \operatorname{bin}(i) \# \operatorname{bin}(j) \# \operatorname{bin}(i') \# \operatorname{bin}(j') \# \operatorname{bin}(m)}$$

mit $m = \begin{cases} 0, & y = L \\ 1, & y = R \\ 2, & y = N \end{cases}$

Jede TM kann über $\{0,1,\#\}$ codiert werden.
Jetzt noch

$$0 \mapsto 00$$
$$1 \mapsto 01$$
$$\# \mapsto 11$$

D.h. wir können TMs über $\{0,1\}$ codieren.

Nicht jedes Wort über $\{0,1\}$ beschreibt eine TM.

Sei $\hat{M}$ die TM, die immer 0 auf das Band schreibt und stoppt.

$$M_w = \begin{cases} \hat{M}, & \text{falls } w \text{ keine Codierung einer TM ist} \\ M, & \text{falls } w \text{ der Code der TM } M \text{ ist} \end{cases}$$

Def Das <u>spezielle Halteproblem</u> ist die Sprache

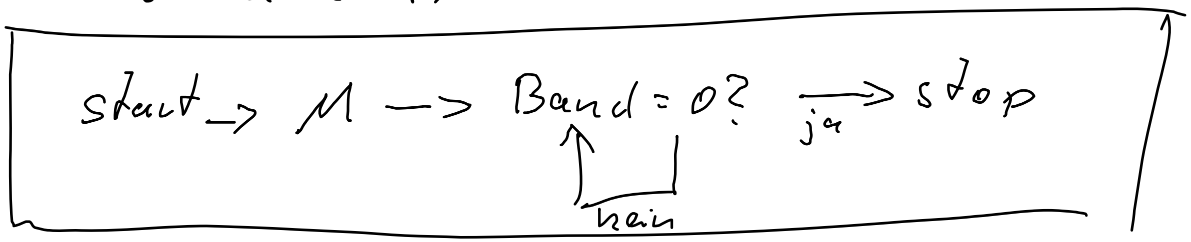
$$K = \{ w \in \{0,1\}^* \mid M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält} \}$$

Satz Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Bew Angenommen K sei entscheidbar. Dann ist χ_K berechenbar mittels TM M.

Konstruiere TM M':

M':



M' stoppt auf Wort w gdw. <u>M_w auf w</u> nicht hält

Sei w' das Codewort für M'.

<u>M' angesetzt auf w' hält</u> gdw M angesetzt auf w' gibt 0 aus.

gdw $\chi_K(w') = 0$

gdw $w' \notin K$

falsch. $u_{n'}$ angesetzt auf w' hält nicht

falsch u' angesetzt auf w' hält nicht

Alternativ:

Wir zählen alle Wörter über $\{0,1\}$ auf.

Wir betrachten die zugehörigen TMs M_{w_i}

M_{w_k} sei die TM, die L entscheidet.

Wir betrachten die berechnete Fkt.

	w_0	w_1	....	w_k	....	w_j	...
M_{w_0}	0	0		$\boxed{U}$		31	
M_{w_1}	0	$\boxed{U}$		10		0	
⋮							
$\longrightarrow M_{w_k}$	1	0		1		0	
⋮							
M_{w_j}	1	11		111		$\boxed{U}$	
⋮							

Betrachte M', so wie vorher definiert

M'	$\boxed{U}$	0	....	$\boxed{U}$	....	0	...

Die von M' berechnet Fkt taucht in der Aufzählung nicht auf! D.h. es ex. keine Codierung von M'! D.h. auch $M = M_{w_k}$ kann nicht in der Aufzählung vorkommen! □

Reduktion

schlau schwätzen

$\uparrow$ red.

Dr. vor dem Namen bekommen $\xrightarrow{\text{reduziert}}$ Promovieren $\xrightarrow{\text{reduzieren}}$ Disputation bestehen

Promotion schreiben

$\downarrow$

aus dem Internet kopieren

<u>Def</u> Seien $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$ Sprachen. Dann ist <u>A auf B reduzierbar</u> (symbolisch $A \leq B$), falls es eine totale und berechenbare Fkt $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$:

$$x \in A \quad \underline{\text{gdw}} \quad f(x) \in B.$$

Lemma Falls $A \leq B$ und B entscheidbar (semi-entsch.), so ist auch A entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar).

Bew: Es gelte $A \leq B$ mittels f.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & f(x) \in B \\ 0, & f(x) \notin B \end{cases} = \chi_B(f(x))$$

D.h. χ_A ist berechenbar durch Hintereinanderschaltung der TMs für f und χ_B. $\square$

Lemma Falls $A \leq B$ und A unentscheidbar ist, dann ist auch B unentscheibar.

Bew Sei $A \leq B$ und A unentscheibar. Angenommen B sei entscheidbar, dann müsste laut vorherigem Lemma A entscheidbar sein ↯

Def Dass <u>allgemeine Halteproblem</u> ist die Sprach

$$H = \{ \underline{w \# x} \mid M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält} \}$$

Satz H ist nicht entscheidbar.

Bew: Wir zeigen $K \leq H$. Wähle $f(w) = w\#w$.

Dann gilt: $w \in K$ gdw. $f(w) = w\#w \in H$

Def Das <u>Halteproblem auf dem leeren Band</u> ist die Sprache

$$H_0 = \{ w \mid M_w \text{ hält auf dem leeren Band} \}$$

Satz H_0 ist unentscheidbar

Bew Es genügt $H \leq H_0$ zu zeigen.

Jedem Wort wird mittels f eine TM $M_{w\#x}$ zugeordnet:

Auf dem leeren Band gestartet verhält sich $M_{w\#x}$ wie folgt:

Schreibe x auf das Band und verhalte dich dann wie M_w.

Auf nicht-leerem Band ist das Verhalten irrelevant

$w\#x \in H$ <u>gdw</u> M_w angesetzt auf x hält

<u>gdw</u> $M_{w\#x}$ hält auf leere Band

<u>gdw</u> $f(w\#x) \in H_0$

Also ist f eine Reduktion von H nach H_0 $\square$

Satz (Rice)

Sei R die Klasse aller TB Fkt. Sei $S \subseteq R$ (mit Ausnahme von $S = R$ und $S = \emptyset$). Dann ist

$$C(S) = \{ w \mid \text{die von } M_w \text{ berechnete eine Fkt, die in } S \text{ liegt} \}$$

unentscheidbar.