Bew.: Transformiere μ-rek. Fkt. in ein WHILE-Prog., dann in ein GOTO-Prog., und wieder in ein WHILE-Prog., und dann in eine μ-rek. Fkt., dann erhalte wir die Form, die gewünscht ist.

$\square$

3.5. Ackermann-Fkt.

Beispiel einer totalen Fkt, die nicht prim.-rek. ist:

$$a(0,y) = y+1$$

$$a(x,0) = a(x-1,1) \qquad x>0$$

$$a(x,y) = a(x-1, a(x,y-1)) \qquad x,y>0$$

Satz a ist eine totale Fkt.

Bew: Induktion über 1. Argument

IA: $a(0, y) = y+1$ für alle $y \in \mathbb{N}$

$a($

IV: $a(x, y)$ ist für alle Werte von y definiert für fixes x

$a(x+1, 0) = a(x, 1)$

IS: $a(x+1, y) = a(x, a(x+1, y-1))$

$= a(x, a(x, a(x+1, y-2)))$

$= \underbrace{a(x, a(x, \ldots\ldots a(x,}_{y\text{-mal}} a(x+1, 0)) \ldots\ldots))$

$= \underbrace{a(x, a(x, \ldots a(x, a(x, 1))}_{y+1\text{-mal}} \ldots\ldots))$

$\square$

Satz a ist wb

Bew: übersetze rekursive Aufrufe in Stack-Operationen. $c(x,y) = n$ $\quad e(c(x,y)) = x$

$f(c(x,y)) = y$

$$PUSH(x, S) \equiv S := c(x, S)$$

$$POP(S) \equiv e(S);\; S := f(S)$$

Stack-Ops durch c, e, f realisieren.

I $\quad a(x,y) < a(x, y+1)$

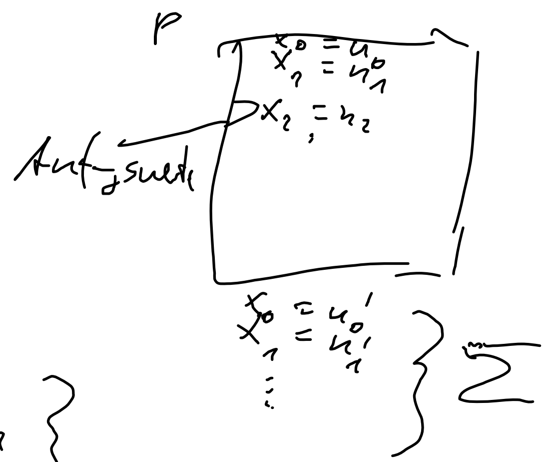
II $\quad a(x, y+1) \leq a(x+1, y)$

III $\quad a(x,y) < a(x+1, y)$

IV $\quad a(x,y) \leq a(x', y') \quad x \leq x' \quad y \leq y'$ $\leftarrow$

ohne Beweis

Für jedes Loop-Prog. $\underline{P}$ def. wir



$\underline{f_P} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$\underline{f_P(n)} = \max \left\{ \sum_{i \geq 0} n_i' \;\middle|\; \sum_{i \geq 0} n_i \leq n \right\},$$

wobei n_i die Startwerte der Variable x_i und n_i' die Endwerte der Var x_i sind.

→ $f_P(n)$ berechnet die <u>maximale</u> Summe über alle Var-Werte, wenn die Summe der Anfangswerte n nicht überschreitet.

<u>Lemma</u> Für jedes LOOP-Prog P ex eine Konstante $\underline{k}$, so dass für alle n gilt:

$$\boxed{f_P(n) < a(k, n)}$$

Bew: strukturelle Induktion über den Aufbau von P

1) $P \equiv x_i := x_j \pm c$ (oBdA $c \in \{0,1\}$)

$\boxed{\text{Dann gilt: } f_P(n) \leq 2n+1}$ $k=2$

Nun ist $\boxed{a(1,y) = y+2}$ $\Leftarrow$ $f_P(n) < a(k,n)$

IA: $a(1,0) = a(0,1) = 2$

IS: $a(1,y+1) = a(0, a(1,y))$

$= a(0, y+2)$

$= y+2+1$

$= (y+1)+2$

Außerdem $\boxed{a(2,y) = 2y+3}$ $\xrightarrow{k=2}$

IA: $a(2,0) = a(1,1) = 3 + 0\cancel{y}$ ✓

IS: $a(2,y+1) = a(1, a(2,y))$

$= a(1, 2y+3)$

$= 2y+3+2$

$= 2(y+1)+3$ ✓

2) $P \equiv \underline{P_1} ; \underline{P_2}$

Nach Ind-Vor. ex. k_1, k_2 mit

$f_{P_1}(n) < a(k_1, n)$ und $f_{P_2}(n) < a(k_2, n)$

Sei $k_3 = \underline{\underline{\max(k_1 - 1, k_2)}}$. Dann gilt:

$$\underline{f_P(n)} \leq \underline{f_{P_2}(f_{P_1}(n))}$$

$$< a(k_2, a(k_1, n))$$

$$\leq a(k_3, a(k_3+1, n)) \qquad \overline{\underline{\text{IV}}}$$

$$= a(k_3+1, n+1) \qquad \text{Def.}$$

$$\leq a(k_3+2, n) \qquad \overline{\underline{\text{II}}}$$

D.h. $k = k_3 + 2$

3) $P \equiv \text{LOOP } x_i \text{ DO } \underline{Q} \text{ EXID}$

Nach Ind.-Vor. ex. k_1 mit $f_Q(n) < a(k_1, n)$.

OBdA komme x_i nicht in Q vor.

Sei $\underline{m \leq n \text{ eine Wahl für den Wert } x_i}$, der $\sum n_i'$ maximiert.

Für $m = 0$ gilt $f_P(n) = n < a(\underline{0}, n) = n+1$

Für $m = 1$ gilt $f_P(n) \leq f_Q(n) < a(\underline{k_1}, n)$

Für $m \geq 2$:

$$f_P(n) \leq \underbrace{f_Q(f_Q(\ldots f_Q}_{m\text{-mal}}(n-m)\ldots)) \underline{+m}$$

$$\left.\begin{array}{l} < a(k_1, f_Q(f_Q \ldots f_Q(n-m)\ldots)) + m \\ \vdots \\ < \underbrace{a(k_1, a(k_1, \ldots a(k_1,}_{m\text{-mal}} n-m) \ldots)) + m \end{array}\right\} m\text{-mal} <$$

$$< a(k_1, a(k_1 \ldots a(k_1+1, n-m)\ldots)) + m \qquad \text{Ш}$$

$= a(k_1+1, n-1) + n$

$f_p(n) \leq a(k_1+1, n-1) < a(k_1+1, n)$ I

Wähle $k = \underline{k_1+1}$

$\square$

<u>Satz</u> a ist nicht LOOP-berechenbar.

<u>Bew</u>: Angenommen a sei Lb. Dann ist auch $g(n) = a(n,n)$ Lb. Sei P das LOOP-Prog, das g berechnet. D.h. $g(n) \leq f_p(n)$. Es ex. ein k mit $f_p(n) < a(k,n)$. Für $n=k$ gilt nun

$$g(k) \leq f_p(k) < a(k,k) = g(k).$$

$\square$

3.6 Unentscheidbarkeit

<u>Def</u> $A \subseteq \Sigma^*$ heißt entscheidbar, falls die charakteristische Fkt $\chi_A : \Sigma^* \to \{0,1\}$ mit

$$\chi_A(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in A \\ 0, & \text{falls } w \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.

<u>Bem.</u> Oft werden Mengen / Sprachen auch (Entscheidungs-) Probleme genannt. Dann oft beschrieben durch Gegeben / Gefragt - Paar,

Gegeben: zwei DFAs A_1, A_2
Gefragt: $L(A_1) = L(A_2)$?

$$\boxed{A = \{ (A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \text{ DFAs und } L(A_1) = L(A_2) \}}$$