Satz Die Klasse der LB Fkt. ist genau die Klasse der prim. rek. Fkt.

$\Leftarrow$: strukturelle Induktion

- Basisfkt (konst. Fkt, Projektionen, Nachfolgerfkt.) sind offensichtlich LB
- Falls f durch Komposition entstanden ist, $\Rightarrow$ LOOP-Prog, das die Parameterwerte berechnet, und dann g aufrufen.
- Falls f durch prim. Rekursion entsteht:

$$f(\underline{0}, n_2, \ldots, n_k) = g(n_2, \ldots, n_k)$$

$$f(n+1, n_2, \ldots, n_k) = h(f(n, n_2, \ldots, n_k), n, n_2, \ldots, n_k)$$

Konstr. LOOP-Prog:

```
y := g(n_2, ..., n_k);
x := 0;
LOOP n DO y := h(y, x, n_2, ..., n_k); x := x+1 END
x_0 = y;
```

$\Rightarrow$ Sei $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ Lb. Seien die in dem LOOP-Prog. P vorkommende Var. $x_0, x_1, \ldots x_k, \ldots x_m$, $m \geq k$.

Mit struktureller Induktion konstr. wir die prim. rek. Fkt. $g_P(c^m(a_0, \ldots, a_m)) = c^m(b_0, \ldots, b_m)$, wobei $a_0, \ldots, a_m$ die Werte vor Ausführung des Programms P sein, und $b_0, \ldots, b_m$ die Werte nach Ausführung.

- Falls $P \equiv x_i := x_j \pm c$ dann ist

$$g_P(n) = c^m(d_0(n), \ldots, d_{i-1}(n), \boxed{d_j(n) \pm c}, d_{i+1}(n), \ldots, d_m(n))$$

- Falls $P \equiv Q; R$, dann ist

$$g_P(n) = g_R(g_Q(n))$$

- Falls $P \equiv$ LOOP x_i DO Q END

$$h(0, x) = x \qquad\qquad g_P(n) = h(d_i(n), n)$$
$$h(n+1, x) = g_Q(h(n,x))$$

$$f(n_1, \dots, n_k) = d_0\Big(g_p\big(0, n_1, \dots, n_k, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{m-k}\big)\Big)$$

das ist die gewünschte pr. Fkt. $\square$

<u>Def</u> (μ-Operator)

Gegeben $f: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$. Dann ist $\mu(f): \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ wie folgt def:

$$\mu(f)(n_1, \dots, n_k) = \min \left\{ n \;\middle|\; \begin{array}{l} f(n, n_1, \dots, n_k) = 0 \text{ und für alle } m < n \\ \text{ist } f(m, n_1, \dots, n_k) \text{ definiert} \end{array} \right\}$$

wobei $\min \emptyset = \text{undef}$.

<u>Bem</u>: Damit könnte wir aus pr Fkt. partielle Fkt. generieren.

<u>Bsp</u>: $f(x, y) = 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{N} \qquad \mu(f)(y) = \text{undef} \quad \forall y \in \mathbb{N}$

Def Die Klasse der μ-rekursiven Fkt. ist die kleinste Klasse von Fkt., die die Basisfkt. enthält und abgeschlossen ist unter Komposition, primitiver Rekursion und Anwendung des μ-Operators.

Satz Die Klasse der wb Fkt. ist genau die Klasse der μ-rekursiven Fkt.

Bew: Ergänzung zum Bew. über pr. Fkt und LB.

$\Rightarrow$ Sei P ein WHILE-Prg. "WHILE $x_i \neq 0$ DO Q END"

wie oben sei $h(n,x)$ die Werte der Var. nach n Durchläufen von Q sind:

$$h(0,x) = x$$
$$h(n+1,x) = g_Q(h(n,x))$$

$h_i(n,x) = d_i(h(n,x))$

$h_i(n,x) = 0$ gdw. $x_i = 0$ nach n Durchläufen ist

Dann ist $g_p(\underline{x}) = h(\mu(h_i)(\underline{x}), \underline{x})$

<u>Bsp</u> für μ-Operator

$f(x, \underline{y}) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$\mu(f) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

f	x	y	
	0	0	1
	1	0	5
	2	0	8
	3	0	3
	4	0	0
	5	0	6
	:	:	undef
	0	1	5
	1	1	1
	2	1	0
	3	1	3
	:	:	
	0	2	1
	1	2	undef
	2	2	2
	3	2	0

$\mu(f)(0) = 4$

$\mu(f)(1) = 2$

$\mu(f)(2) = \text{undef}$

$\Leftarrow$ Sei g mit Hilfe von μ def. also $g = \mu f$.

Nach Ind.-voraus. ex. ein WHILE-Prog. P um f zu berechnen. Dann kann g wie folgt berechnet werden:

$x_0 := 0;\ y := f(0, x_1, \ldots, x_n);$

WHILE $y \neq 0$ DO

$\quad x_0 := x_0 + 1;$

$\quad y := \underline{f(x_0, x_1, \ldots, x_n)}$

END

<u>Satz</u> (Kleene)

Für jede n-stellige μ-rek. Fkt f gibt es zwei $n+1$-stellige prim. rek. Funktionen p und q, so dass

$$f(x_1, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_n, \mu(q)(x_1, \ldots, x_n))$$

Bew.: Transformiere μ-rek. Fkt. in ein WHILE-Prog., dann in ein GOTO-Prog., und wieder in ein WHILE-Prog., und dann in eine μ-rek. Fkt., dann erhalte wir die Form, die gewünscht ist.

$\square$

3.5. Ackermann-Fkt.

Beispiel einer totalen Fkt, die nicht prim.-rek. ist:

$$
\begin{aligned}
a(0,y) &= y+1 \\
a(x,0) &= \underline{a(x-1,1)} && x>0 \\
a(x,y) &= a(x-1, a(x,y-1)) && x,y>0
\end{aligned}
$$