$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{Lb} \arrow[d, "1"] & \\
Gb \arrow[r, shift right, "4"'] & Wb \arrow[l, shift right, "3"'] \arrow[r, "2"] & Tb \arrow[ll, bend left, "5"]
\end{tikzcd}$$

3.4 Primitiv und μ-rekursive Fkt.

Basisfkt.:

- konstante Fkt $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $f(n_1, \dots, n_k) = c$
- Projektionen $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ mit $\pi_i^k(n_1, \dots, n_i, \dots, n_k) = n_i$
- Nachfolgefkt $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $s(n) = n+1$

Konstruktion:

- Fkts.-Komposition: $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ und m Fkt. $h_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, dann entsteht $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ durch Komposition wie folgt:

$$f(\underline{n_1, \dots, n_k}) = \underline{g}(\underline{h_1(n_1, \dots, n_k)}, \dots, \underline{h_m(n_1, \dots, n_k)})$$

– Primitive Rekursion

Gegeben $g: \mathbb{N}^{k-1} \to \mathbb{N}$ und $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$, dann entsteht durch primitive Rekursion $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$:

$$f(0, n_2, \dots, n_k) = g(n_2, \dots, n_k)$$

$$f(n+1, n_2, \dots, n_k) = h(\underline{f(n, n_2, \dots, n_k), n, n_2, \dots n_k})$$

Bsp: Gegeben $id: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s_3: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$

$id(n) = n$, $s_3(n_1, n_2, n_3) = n_1 + 1$

Neue Fkt. $p: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$p(0, x) = id(x) \checkmark$$

$$p(n+1, x) = s_3(p(n, x), n, x) = p(n, x) + 1$$

$p \equiv add$

Def Die Klasse der primitiv rekursiven Fkt. ist induktiv definiert durch:

1. Alle konstanten Fkt. sind primitiv rekursiv (pr)
2. Alle Projektionen sind pr.
3. Die Nachfolgefkt. ist pr.
4. Alle Fkt., die Kompositionen von pr. Fkt. sind, sind pr.
5. Alle Fkt, die durch primitive Rekursion aus pr. Fkt. entstehen sind pr.

Bsp: add ist pr., da id ist pr. $id(x) = \pi_1^1(x)$, und s_3 ist pr, da $s_3(n_1, n_2, n_3) = s(\pi_1^3(n_1, n_2, n_3)) = n+1$

Bem: Vertauschung und Identifikation und Hinzunahme von Parametern erhält primitive Rekursivität

Bsp: $f: \mathbb{N}^5 \to \mathbb{N}$ sei pr. und wir wollen $g: \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$

definiere wie folgt $g(a,b,c,d) = f(b,b,c,a,c)$

$$g(a,b,c,d) = f(\pi^4_2(a,b,c,d), \pi^4_2(a,b,c,d), \pi^4_3(a,b,c,d), \pi^4_1(a,b,c,d), \pi^4_3(a,b,c,d))$$

Bsp: $mult: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $mult(a,b) = a * b$

$$mult(0,x) = 0$$

$$mult(n+1,x) = \boxed{add(mult(n,x), x)}$$

$$= a(mult(n,x), n, x)$$

$$a(n_1,n_2,n_3) = add(\pi^3_1(n_1,n_2,n_3), \pi^3_3(n_1,n_2,n_3))$$

$$= add(n_1,n_3)$$

Bem: Bei der prim. Rekursion können auf der rechten Seite auch Parameter weggelassen.

Bem: Alle pr. Fkt sind berechenbar und total.

Einige pr. Fkt.:

$v(n) = \max(n-1, 0)$ ist pr.

$v(0) = 0$

$v(n+1) = n$

Damit ist die modifizierte Subtraktion pr:

$sub(x, 0) = x$

$sub(x, y+1) = v(sub(x, y))$

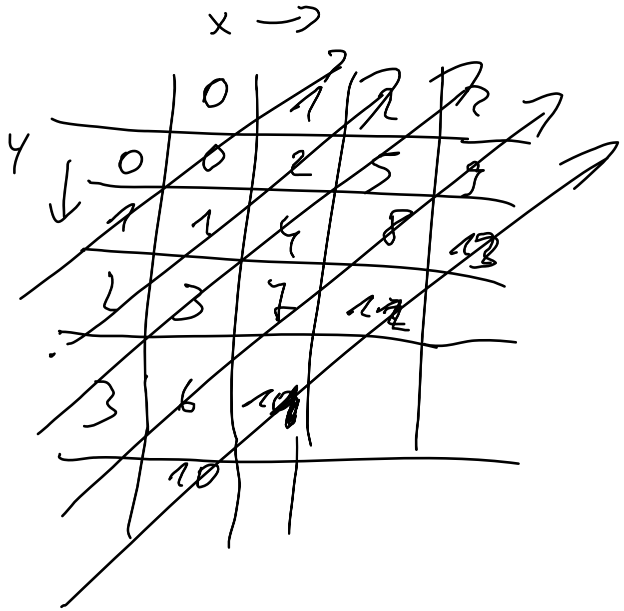
$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ ist pr:

$\binom{0}{2} = 0$

$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + n$

$c(x,y) = \binom{x+y+1}{2} + x$ ist pr.

Bem: c ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}^2$ (ohne Bew)



→ wir können Paare von nat. Zahlen in eine Zahl kodieren

$$c^{k+1}(n_0, \dots, n_k) = c(n_0, c(n_1, \dots\ c(n_k, 0) \dots) \dots)$$

D.h. c^{k+1} ist pr.!

Umkehrfkt.:

$$e(c(x,y)) = x \qquad f(c(x,y)) = y$$

und $c(e(n), f(n)) = n$

Für c^{k+1} def die Umkehrfkt d_i, $i = 0, \dots, k$

$$d_0(n) = e(n)$$

$$d_1(n) = e(f(n))$$

$$\vdots$$

$$d_k(n) = e(\underbrace{f(f \dots f}_{k\text{-mal}}(n) \dots))$$

Nachweisen, dass e und f pr sind.

Notation Sei $P(\,)$ ein logisches Prädikat. Wir identifizieren P mit ihrer charakteristischen Fkt

$$\chi_P(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } P(x) \text{ wahr ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Def Gegeben ein 1-stelliges Prädikat P, so ist der beschränkte max-Operator def wie folgt

$$\max\{x \leq n \mid P(x)\} \quad \text{mit} \quad \max \emptyset = 0$$

Der Operator ist pr, wenn das Prädikat pr ist:

$$q(0) = 0$$

$$q(n+1) = \begin{cases} n+1, & \text{falls } P(n+1) \text{ wahr ist} \\ q(n), & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= q(n) + P(n+1) * (n+1 - q(n))$$

Def $\exists x \leq n \; P(x)$ ist der beschränkte Existenzop., Formel wird wahr, wenn es ein $x \leq n$ gibt, das P wahr macht.

Bem.: $Q(n) = \exists x \leq n\ P(x)$ ist pr., da

$$Q(0) = P(0)$$

$$Q(n+1) = \underline{P(n+1)} + \underline{Q(n)} - \underline{P(n+1) * Q(n)}$$

Damit gilt dann, dass e und f pr:

$$e'(n, m, k) = \max \{ x \leq n \mid \exists y \leq k : c(x,y) = m \}$$

$$f'(n, m, k) = \max \{ y \leq n \mid \exists x \leq k : c(x,y) = m \}$$

$$e(n) = e'(n, n, n)$$

$$f(n) = f'(n, n, n)$$

<u>Satz</u> Die Klasse der LB Fkt ist genau die Klasse der prim. rek. Fkt.