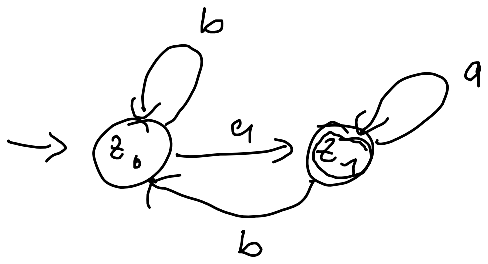
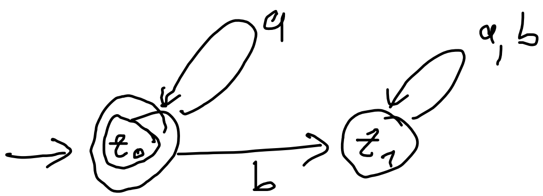
$$L_1 = \{ xa \mid x \in \{a, b\}^* \}$$

$$L_2 = \{ a^n \mid n \geq 0 \}$$

$$L_1 \cap L_2 = \{ a^n \mid n \geq 1 \}$$





Entscheidbarkeit (für Prob. über reg. Spr.)

- Wortproblem $x \in L$ ✓
- Leerheitsproblem $L = \emptyset$? ✓
- Endlichkeitsproblem $|L| < \infty$? ✓
- Disjunktheitsproblem $L_1 \cap L_2 = \emptyset$? ✓
- Äquivalenzproblem $L_1 = L_2$?
  - Minimalaut. bilden + auf Isomorphie vergleichen
  - oder mengentheoretisch

$L_1 = L_2$ gdw. $L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset$ und $\overline{L_1} \cap L_2 = \emptyset$

gdw. $(L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (\overline{L_1} \cap L_2) = \emptyset$

<u>Bem</u>: Effizienz hängt von der Darstellung der Sprache ab.

<u>Bsp</u>: Äquivalenz ist einfach f. DFAs, kein eff. Alg. bekannt für NFAs (NP-hard).

2.3 Kontextfreie Sprachen

Bsp: $L = \{1^n 0^n \mid n \geq 1\}$ ist nicht regulär, sie ist aber kontextfrei.

$S \to 10$
$S \to A\cancel{X}0$ (S)
$T \to S$
$S \to T$
$A \to B$
$B \to 1$

$A \to 1$

$S \to 10$
$S \to 1S0$

$S \to \cancel{10}$ EN
$\cancel{S \to AS\cancel{0}N}$ $\to$ $S \to AC_2$
$A \to 1$
$B \to 1$
$E \to 1$
$N \to 0$

$C_2 \to SN$

E, N

C_2 ist neu!

$S \to EN$ $\quad A \to 1$
$S \to AC_2$ $\quad B \to 1$
$C_2 \to SN$ $\quad E \to 1$
$N \to 0$

2.3.1 Normalformen

Def. Eine kontextfreie Gram. G mit $\varepsilon \notin L(G)$ ist in Chomsky-Normalform (CNF), falls alle Regeln die folgende Form haben

$$\boxed{A \to BC} \quad \text{oder} \quad \boxed{A \to a},$$

wobei $A, B, C \in V$ und $a \in \Sigma$

<u>Satz</u> Zu jeder Typ 2 Gram. G mit $\varepsilon \notin L(G)$ ex. eine CNF-Gram. G' mit $L(G) = L(G')$.

<u>Bew:</u>

1) Eliminierung der Regeln der Art $A \to B$

1a) Identifiziere Regeln der Art

$$\boxed{B_1 \to B_2,\ B_2 \to B_3,\ \dots,\ B_{k-1} \to B_k,\ B_k \to B_1}$$

Ersetze die B_k's durch ein neues Symbol B und löschen die Regeln.

1b) Nummeriere die Variable so, dass für die Regel $A_i \to A_j \in P$ gilt: $i<j$.

Absteigend für $k = n, \dots, 1$ eliminiere Regeln der Art $A_{k'} \to A_k$

Falls $A_k \to x_1,\ A_k \to x_2,\ \dots A_k \to x_k \in P$, dann nimm hinzu

$$\underline{A_{k'} \to x_1,\ A_{k'} \to x_2,\ \dots,\ A_{k'} \to x_k}$$

Alle Regeln haben jetzt die Form

$A \to a \qquad (A \in V,\ a \in \Sigma)$

$A \to x \qquad (A \in V,\ x \in (V \cup \Sigma)^*),\ |x| \geq 2$

2a) Füge für jedes Symbol $b \in \Sigma$ eine Var. B hinzu und ergänze die Regeln P um: $B \to b$

2b) Ersetze alle Terminalsymbole auf rechten Seite durch die entspr. Variable (außer bei Regeln der Art $A \to a$)

2c) Spalte Regeln der Art

$$A \to B_1 B_2 \dots B_k \ ,\ k > 2, \text{ auf in:}$$

$$\begin{aligned} A &\to B_1 C_2 \\ C_2 &\to B_2 C_3 \\ &\vdots \\ C_{k-1} &\to B_{k-1} B_k \end{aligned}$$

für neue Variablen $C_2, \dots, C_{k-1}$

Jetzt ist die Gramm. in der gewünschten Form! $\square$

Def

Eine Typ2 Gramm. G mit $\varepsilon \notin L(G)$ ist Greibach-Normalform, falls alle Regeln die folgende Form haben:

$$A \to a B_1 \dots B_k \qquad (k \geq 0), \; A, B_i \in V, \; a \in \Sigma$$

Satz Zu jeder Gramm. G mit $\varepsilon \notin L(G)$ gibt es eine Gram G' in Greibach-NF mit $L(G') = L(G)$.

ohne Bew

2.3.2 Pumping-Lemma für kontextfreie Sprache

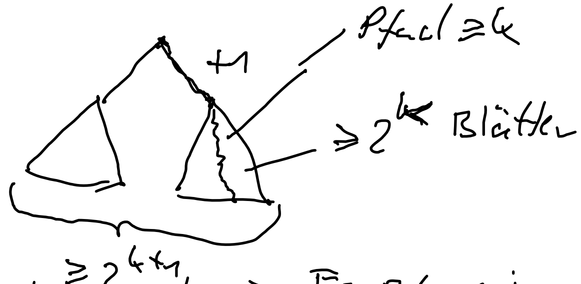
Lemma Sei B ein Binärbaum mit mindestens 2^k Blättern. Dann hat B mind. einen Pfad der Länge k oder größer.

Bew: Induktion über k

IA: Jeder Binärbaum mit $2^0 = 1$ Blättern hat einen Pfad der Länge 0.

IV: Die Beh. gelte für $k \in \mathbb{N}$

IS: Betrachte Binärbaum mit $\geq 2^{k+1}$ Blättern.



$\Rightarrow$ Verlängerung bis zur Wurzel $\Rightarrow$ Es ex. ein Pfad $\geq k+1$ $\square$

Satz (Pumping-Lemma, uvwxy-Theorem)

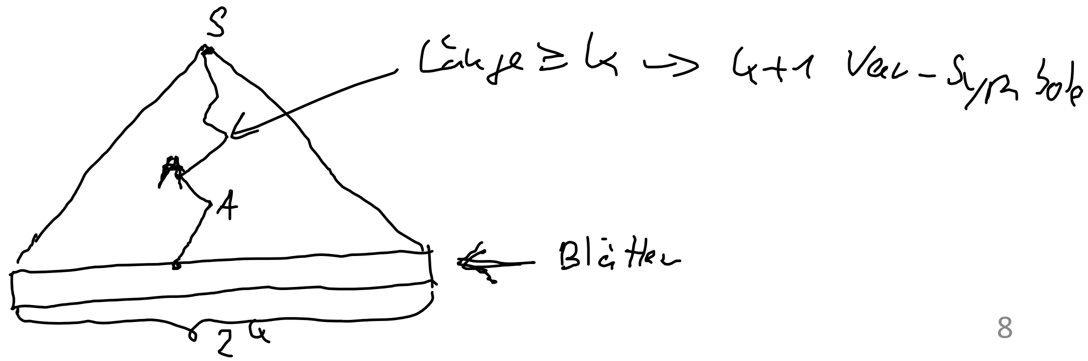
Sei L eine kontextfreie Spr. Dann ex. $n \in \mathbb{N}$, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lassen in $z = uvwxy$ und folgende Eigenschaften:

(1) $|vx| \geq 1$

(2) $|vwx| \leq n$

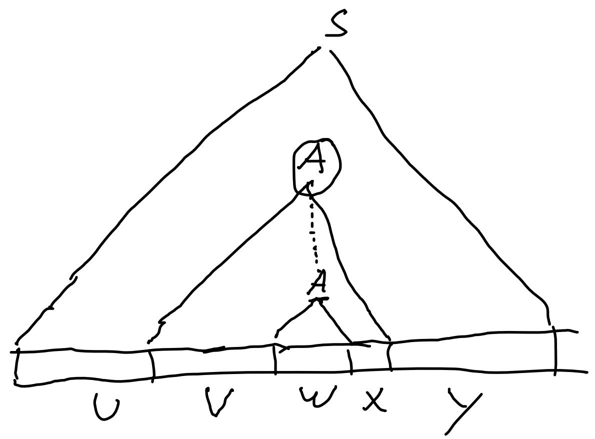
(3) $uv^iwx^iy \in L \quad \forall i \geq 0$

Bew: Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Gram. für $L - \{\varepsilon\}$ in CNF. Sei $k = |V|$. Wähle $n = 2^k$. Betrachte Syntaxbaum für bel. $z \in L$ mit $|z| \geq n$.



Auf dem Pfad liegen k+1 Var. D.h. mind. eine Var. kommt doppelt vor. Wir suchen von unten nach oben nach einem Doppelvorkommen. Oberes Symbol ist max k Schritte entfernt von Blättern.

wähle Zerlegung

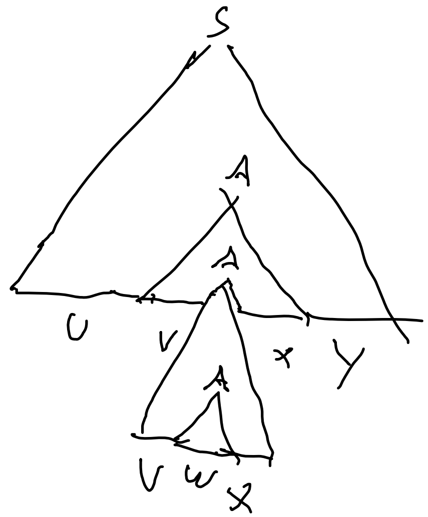


Da $A \to BC$, muss v oder x (oder beide) müssen nicht leer sein, d.h. $|vx| \geq 1$. D.h. (1) ist erfüllt.

Da der Binärbaum unterhalb des oberen As keinen Pfad $> k$ enthält, können unterhalb von A höchstens $2^k = n$ Blätter: $|vwx| \leq n$. D.h. (2) ist erfüllt.

Aus Beiden gehören folgende Worte zu L:

uv^0wx^0y



uv^2wx^2y

$\dots$

$uv^iwx^iy \in L$
$\forall i \geq 0$

D.h. (3) gilt auch.

$\square$

<u>Anwendung</u>: $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ ist nicht Typ2

<u>Bew</u>: Angenommen L sei Typ2, dann ex. n mit den PL-Eigenschaften.

Wähle $z = a^n b^n c^n$, d.h. $|z| = 3n$. Wg. (2) kann

$\underline{vx}$ nicht aus a's, b's und c's bestehen, da ja

$|vwx| \leq n$. Wg. (1) muß $|vx| \geq 1$. Wg. (3)

$u\underline{v}^0 w \underline{x}^0 y \in L$. Dies Wort hat nicht mehr

die gleiche Anzahl von a's, b's und c's. Widerspruch. ☐

2.3.3 Abschlusseigenschaften