Bsp: $L = \{ x \in \{a,b\}^* \mid x \text{ endet mit } ba \}$

$[\varepsilon]_{\sim_L} = \{ x \mid x \text{ endet nicht mit } ba \text{ und nicht mit } b \}$

$[b]_{\sim_L} = \{ x \mid x \text{ endet mit } b \text{ } \cancel{\text{endet}} \}$

$[ba]_{\sim_L} = \{ x \mid x \text{ endet mit } ba \}$

$\Sigma^* = [\varepsilon]_{\sim_L} \cup [b]_{\sim_L} \cup [ba]_{\sim_L}$

$\delta([\varepsilon], a) = [\varepsilon]$

$\delta([\varepsilon], b) = [b]$

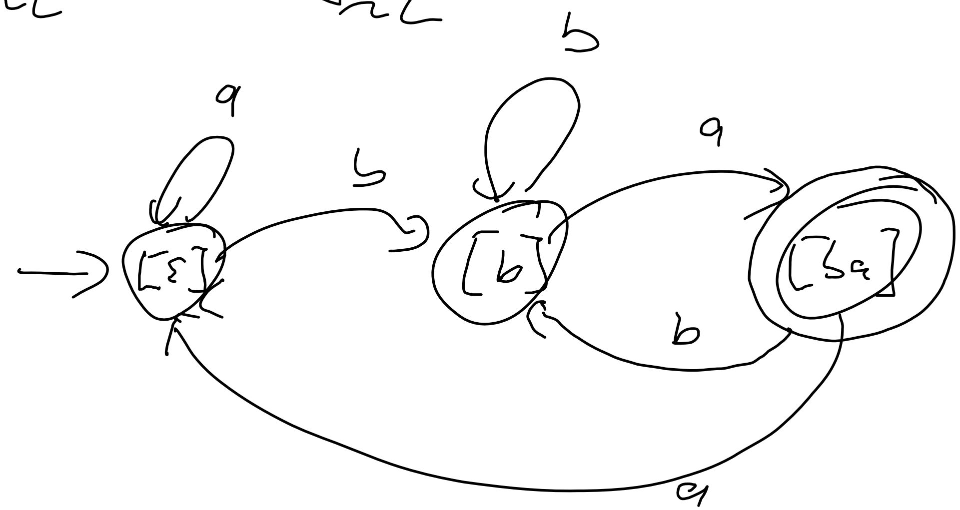
$\delta([b], b) = [b]$

$\delta([b], a) = [ba]$

$\delta([ba], a) = [\varepsilon]$

$\delta([ba], b) = [b]$

$E = \{ [ba] \}$



Bem: Der Äquivalenzklassenautomat ist der Minimalautomat (geringste Anzahl von Zuständen).

$\sim_L \quad \sim_M \qquad \text{Index}(\sim_{\underline{L}}) \leq \text{Index}(\sim_{\underline{M}})$

$\parallel$

Anzahl der Zustände im Äquivalenzkl.-Akt.

Gilt nur für DFAs.

Wann ist ein DFA nicht minimal?

$\rightarrow$ Es ex. $z, z' \in Z$, $z \neq z'$ mit $\hat{\delta}(z, x) \in E$ gdw. $\hat{\delta}(z', x) \in E$ $\underline{\forall x \in \Sigma^*}$

$\Rightarrow$ wir können diese Zustände verschmelzen.

Algorithmus (Minimalautomat)

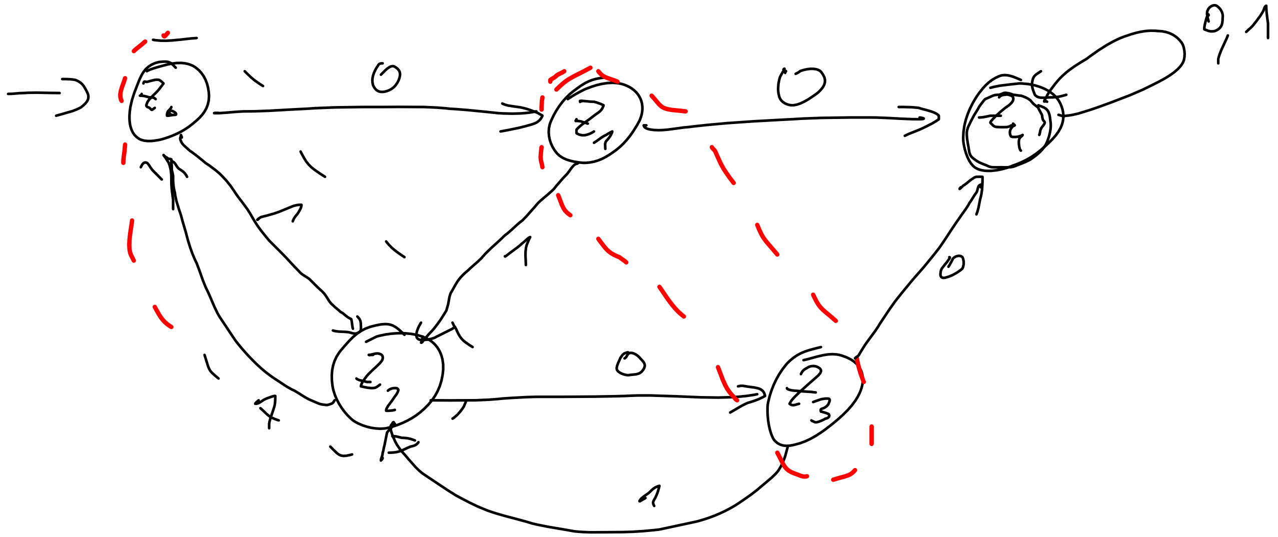
Eingabe: DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$

Ausgabe: Paare von zu verschmelzenden Zuständen

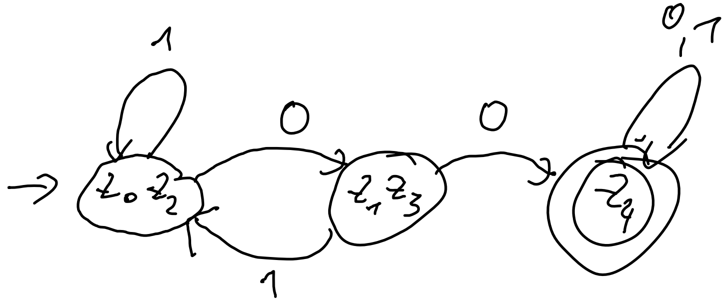
1. Konstruiere Tabelle mit Zustandspaaren $\{z, z'\}$ $z \neq z'$
2. Markiere $\{z, z'\}$ falls $z \in E$ und $z' \notin E$ (oder umgekehrt)
3. Für unmarkierte Paare $\{z, z'\}$ und $a \in \Sigma$ teste ob $\{\delta(z, a), \delta(z', a)\}$ markiert.
   Wenn ja $\Rightarrow$ markiere
4. Wiederhole 3 für alle Zustandspaare und Symbole, bis sich nichts mehr ändert.

$\Rightarrow$ alle unmarkierten Paare sind verschmelzbar

Bsp



	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
z_0					
z_1	2				
z_2	–	2			
z_3	2	–	2		
z_4	1	1	1	1	



2.2.6 Abschlusseigenschaften

<u>Def</u> Sei X eine bel. Menge und $M \subseteq X$.

Sei op eine binäre (oder unäre) Operation über X.

Dann heißt M abgeschlossen unter op, falls

$\forall x, y \in M: \; x \text{ op } y \in M$

(unär $\forall x \in M: \; \text{op } x \in M$).

<u>Satz</u>

Die reg. Spr. sind abgeschlossen unter:

- Vereinigung
- Schnitt
- Komplement
- Produkt
- Stern

Bem: Abschluss unter Vereinigung, Produkt und Stern

vgl. den Satz von Kleene.

Komplement: Sei eine rg. Spr. durch den

DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ gegeben. Sei

$M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z - E)$. Offensichtlich $T(M') = \overline{T(M)}$.

Schnitt: Kreuzproduktautomat:

Gegeben DFAs $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, z_{0_1}, E_1)$, $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{0_2}, E_2)$

konstr. $M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (z_{0_1}, z_{0_2}), E_1 \times E_2)$

$$\delta((z, z'), a) = (\delta_1(z, a), \delta_2(z', a))$$

Offensichtlich $T(M) = T(M_1) \cap T(M_2)$

Bem: Funktioniert auch für NFAs?

Alternativ:

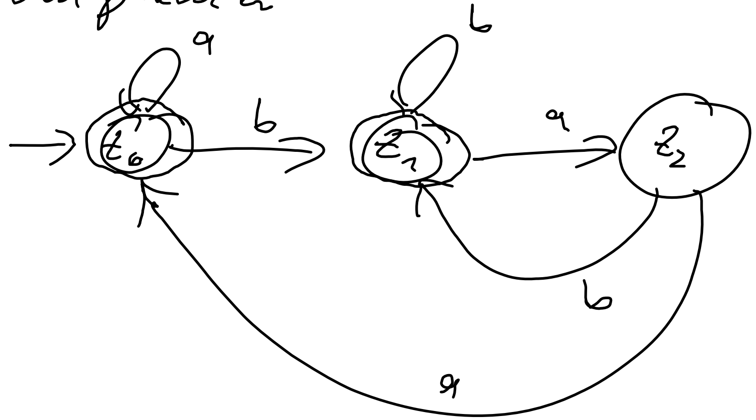
L_1, L_2 reg.

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

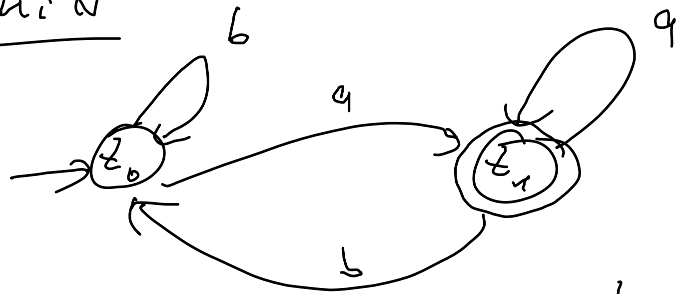
$\#$

Bsp:

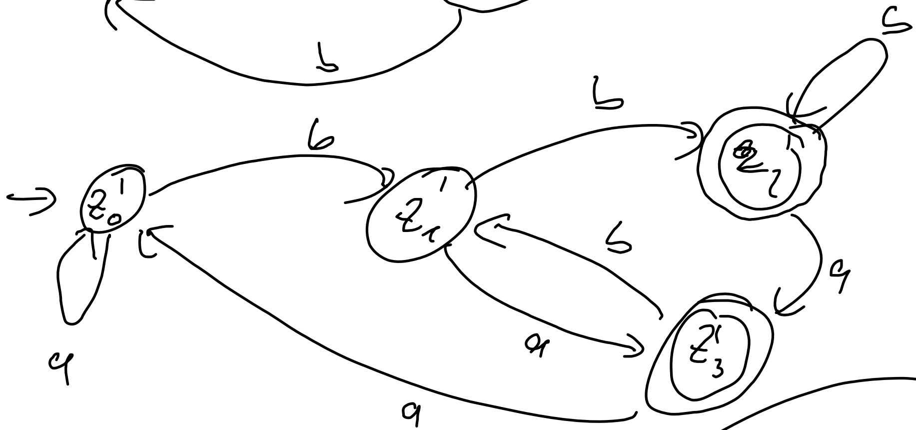
Komplement



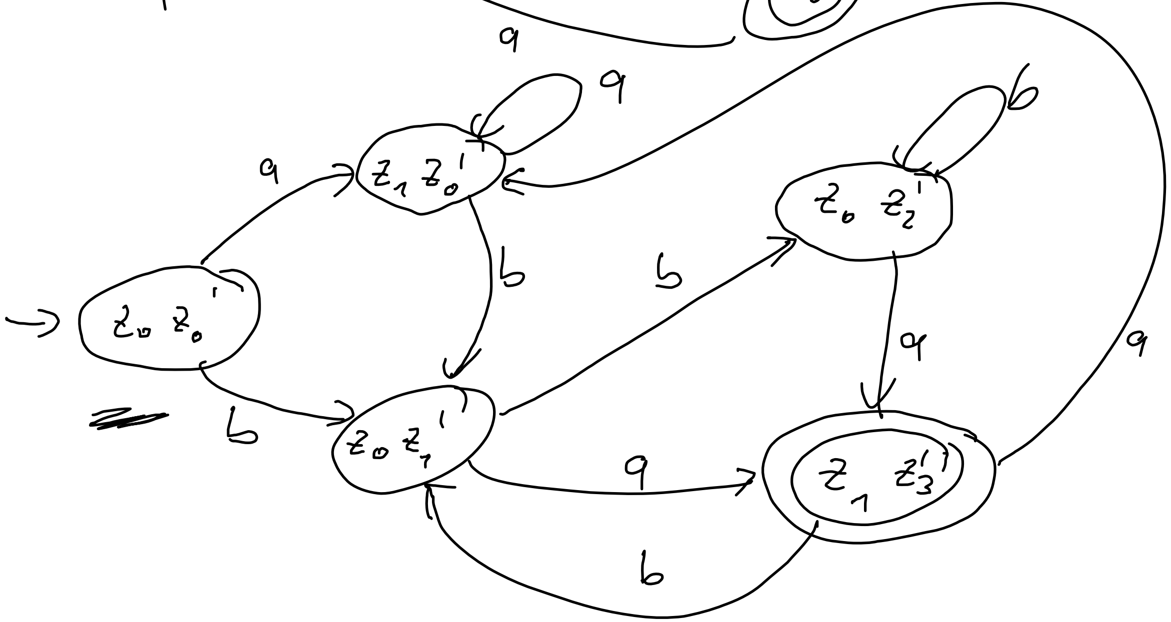
Schnitt



erkennt alle Worte, die mit a enden



erkennt alle Worte, die an vorletzter Stelle ein b haben



2.2.7 Entscheidbarkeit

Satz Das Wortproblem für DFAs und NFAs ist in linearer Zeit entscheidbar.

Satz Das Leerheitsproblem ($L = \emptyset$?) ist für rg. Spr. entscheidbar.

Bew: Für DFA oder NFA teste, ob es einen Pfad von einem Startzustand zu einem Endzustand gibt. Wenn ja $L \neq \emptyset$, sonst $L = \emptyset$. ⌑

Satz Das Endlichkeitsproblem ($|L| < \infty$?) ist für rg. Spr. entscheidbar.

Bew: Für eine DFA: Entferne alle Zustände, die nicht vom Startzustand erreichbar sind oder von denen aus keine Endzustände erreichbar sind. Enthält der Automat dann Zyklen: $|L| = \infty$, sonst $|L| < \infty$.

Satz Das Disjunktheitsproblem ($L_1 \cap L_2 = \emptyset$?) ist entscheidbar.

Bew ✓ $\square$