2.2.4 Pumping-Lemma

Hilfsmittel um zu zeigen, dass eine Spr. **nicht regulär** ist.

Satz (Pumping-Lemma, Bar-Hillel-Lemma, uvw-Theorem)

Sei L ein reg. Spr. Dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass sich für alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung $x = uvw$ finden lässt, so dass folgende Bedingungen gelten:

(1) $|v| \geq 1$

(2) $|uv| \leq n$

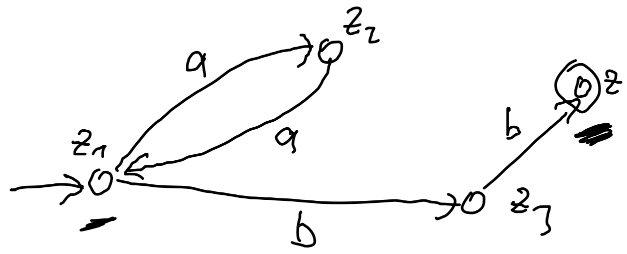
(3) Für alle $i \geq 0$ gilt: $uv^iw \in L$

$$\forall L \text{ reg} \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} : (\forall x \in L : |x| \geq n \Rightarrow (\exists u,v,w : x = uvw \land |v| \geq 1 \land |uv| \leq n \land (\forall i \in \mathbb{N} : uv^iw \in L))))$$

Bew (⇒) L reg., ex. DFA M mit $L = T(M)$.

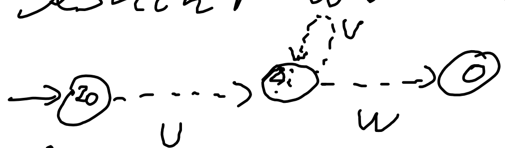
Exkurs

$M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$



a a ~~b~~ aabb

Setze $n = |Z|$. Sei $x \in L$ beliebig und $|x| \geq n$. D.h. wir besuchen mind. $n+1$ Zustände. D.h. mind. Zustand muss 2x besucht werden.



Wähle Zerlegung:

Bed (1) $|v| \geq 1$ ist erfüllt

Bed (2) $|uv| \leq n$ kann erreicht werden

Bed (3) $uv^iw \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist auch erfüllt. □

Anwendung: Zeige, dass $L = \{a^k b^k \mid k \geq 1\}$ ist nicht regulär.

Bew: Angenommen L sei regulär, dann existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$ Pumping-Lemma-zerlegbar sind.

Betrachte $\boxed{a^n b^n}$ (mit der Länge $2n$). Betrachte Zerlegung uvw. Wg. (1) ist $v \neq \varepsilon$, wg Beding (2) gilt $v = a^k$, $k \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{aa \ldots aa}_{n} \mid \underbrace{bb \ldots bb}_{n}$$

$$u \quad v \mid w$$

D.h. mit Bed. (3) folgt $a^{n-|v|} b^n \in L$. Widerspruch!

D.h. L kann nicht reg. sein. $\square$

Bsp $L = \{ a^m \mid m$ ist Quadratzahl$\} = \{ a, aaaa, a^9, a^{16}, \dots \}$ ist nicht reg.

Bew Angenommen L sei regulär, dann ex. n, so dass alle Worte a^m, $m \geq n$, m Quadratzahl, PL-zerlegbar sind. Wähle $x = a^{n^2}$. Sei $x = uvw$ beliebig, die Bed (1)–(3) erfüllt.

Wg. (1) und (2):

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

Mit (3) folgt:

$$uv^2w \in L.$$

Andererseits:

$$n^2 = |x| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

D.h. $|uv^2w|$ kann keine Quadratzahl sein, da sie zwischen aufeinander folgenden Quadratzahlen liegt. Widerspruch! D.h. L kann nicht regulär sein. $\square$

2.2.5 Myhill-Nerode-Äquivalenzrelation und Minimalautomaten

Def (Äquivalenzrel.)

Eine binäre Relation über einer Menge X, geschrieben $\sim$, heißt Äquivalenzrelation, wenn sie die folgende Bedingung erfüllt:

(1) Reflexivität: $x \sim x \quad \forall x \in X$

(2) Transitivität: $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z \quad \forall x,y,z \in X$

(3) Symmetrie: $x \sim y \Rightarrow y \sim x \quad \forall x,y \in X$

Def (Äquivalenzklassen, Index)

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation über X, dann bezeichnet

$[x]_\sim$ die Menge aller $y \in X$, die äquivalent zu x sind.

Der Index einer Äquivalenzrelation $\sim$, geschrieben $\mathrm{Index}(\sim)$, ist die Anzahl der Äquivalenzklassen.

Bsp: $x \sim y$ def durch $|x| = |y|$. Ist offensichtlich eine Äquivalenzrel. über Σ^*. Index ist ∞

Def (Myhill-Nerode-Relation)

Gegeben eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$. Dann ist die Myhill-Nerode-Relation $\sim_L$ wie folgt definiert:

$$x \sim_L y \ \text{gdw} \ \forall z \in \Sigma^* : (xz \in L \ \text{gdw.} \ yz \in L)$$

Bem: $\sim_L$ ist offensichtlich eine Äquivalenzrel.

Satz (Myhill, Nerode)

Eine Spr. L ist genau dann reg., wenn der Index $\sim_L$ endlich ist.

Bew ($\Rightarrow$) Sei L reg und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA und $L = T(M)$. Dann definieren wir $\sim_M$:

$$x \sim_M y \quad \text{gdw.} \quad \hat{\delta}(z_0, x) = \hat{\delta}(z_0, y).$$

Wir zeigen: $x \sim_M y \Rightarrow x \sim_L y$

Sei $\hat{\delta}(z_0, x) = \hat{\delta}(z_0, y)$ und $z \in \Sigma^*$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
xz \in L \quad &\text{gdw.} \quad \hat{\delta}(z_0, xz) \in E \\
&\text{gdw.} \quad \hat{\delta}(\hat{\delta}(z_0, x), z) \in E \\
&\text{gdw.} \quad \hat{\delta}(\hat{\delta}(z_0, y), z) \in E \\
&\text{gdw.} \quad \hat{\delta}(z_0, yz) \in E \\
&\text{gdw.} \quad yz \in L
\end{aligned}$$

$$|Z| \geq \text{Index}(\sim_M) \geq \text{Index}(\sim_L)$$

$$\Rightarrow \text{Index}(\sim_L) \text{ ist endlich.}$$

($\Leftarrow$) Sei Index($\sim_L$) endlich. D.h. $\Sigma^* = [x_1]_{\sim_L} \cup \ldots \cup [x_n]_{\sim_L}$.

Konstruiere DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$:

- $Z = \{ [x_1]_{\sim_L}, [x_2]_{\sim_L}, \ldots, [x_n]_{\sim_L} \}$
- $z_0 = [\varepsilon]_{\sim_L}$
- $E = \{ [x]_{\sim_L} \mid x \in L \}$
- $\delta([x]_{\sim_L}, a) = [xa]_{\sim_L} \quad \forall a \in \Sigma$

Es folgt

$\hat{\delta}([\varepsilon]_{\sim_L}, x) = [x]$. Damit folgt

$x \in T(M)$ gdw. $\hat{\delta}(z_0, x) \in E$

gdw. $\hat{\delta}([\varepsilon]_{\sim_L}, x) \in E$

gdw. $[x] \in E$

gdw. $x \in L$

$\square$

Bsp: $L = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$ ist nicht regulär, da $\sim_L$ einen unendlichen Index hat.

$[ab]_{\sim_L} = L = \{ ab, a^2b^2, a^3b^3, \ldots \}$

$[a^2b]_{\sim_L} = \{ a^2b, a^3b^2, a^4b^3, \ldots \}$

$[a^3b]_{\sim_L} = \{ a^3b, a^4b^2, a^5b^3, \ldots \}$

$[a^kb]_{\sim_L} = \{ a^kb, a^{k+1}b^2, \ldots \}$

$\rightarrow$ D.h. $\sim_L$ hat einen unendlichen Index!