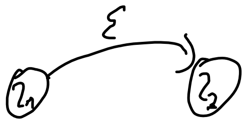
ε-NFAs

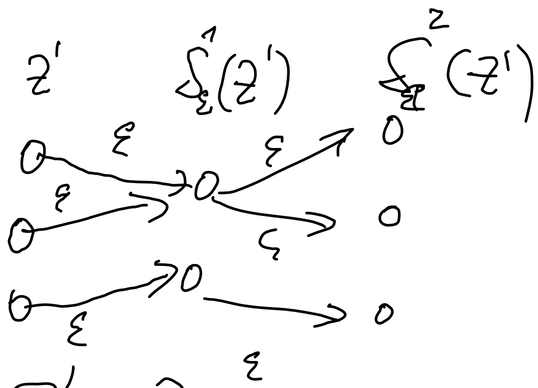


Def ($\hat\delta$ und $T(M)$ für ε-NFAs)

$$\hat\delta(Z',\varepsilon) = \bigcup_{i=0}^{|Z|} \delta_\varepsilon^i(Z') \qquad Z' \subseteq Z$$

$$\rightsquigarrow \delta_\varepsilon^0(Z') = Z'$$

$$\delta_\varepsilon^{i+1}(Z') = \delta_\varepsilon^i\Big(\bigcup_{z\in Z'} \delta(z,\varepsilon)\Big)$$



$$\hat\delta(Z',aw) = \bigcup_{z\in\hat\delta(Z',\varepsilon)} \hat\delta(\delta(z,a),w) \qquad Z' \subseteq Z$$

$$\rightsquigarrow T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat\delta(S,w) \cap E \neq \emptyset\}$$

<u>Satz</u> Zu jedem εNFA M ex. ein NFA M' mit $T(M) = T(M')$ und umgekehrt.

<u>Bew</u>:

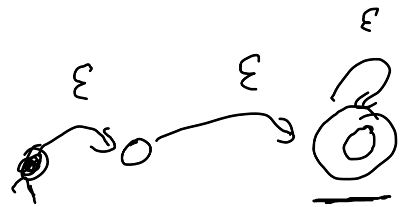
$(\Leftarrow)$: Gegeben NFA M'. Dieser ist gleichzeitig ein ε-NFA und akz. natürlich die gleiche Spr.

$(\Rightarrow)$: Gegeben ε-NFA M. Konstr. NFA M':

$M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$. Dann sei $M' = (Z, \Sigma, \delta', S, E')$

$\underline{\delta'(z,a)} = \hat{\delta}(\underline{\{z\}}, a)$ für alle $z \in Z$

$E' = \{z \mid \hat{\delta}(\{z\}, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset\}$



$w \in T(M)$ gdw. $w \in T(M')$

DFA $\delta : Z \times \Sigma \to Z$

NFA $\delta : Z \times \Sigma \to P(Z)$

} definiere den Automaten

$\hat{\delta}$ ist die Fortsetzung von δ auf Σ^*

DFA: $\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$

NFAs: $\hat{\delta} : P(Z) \times \Sigma^* \to P(Z)$

$\hat{\delta}(z_2, abcd) = z_8$

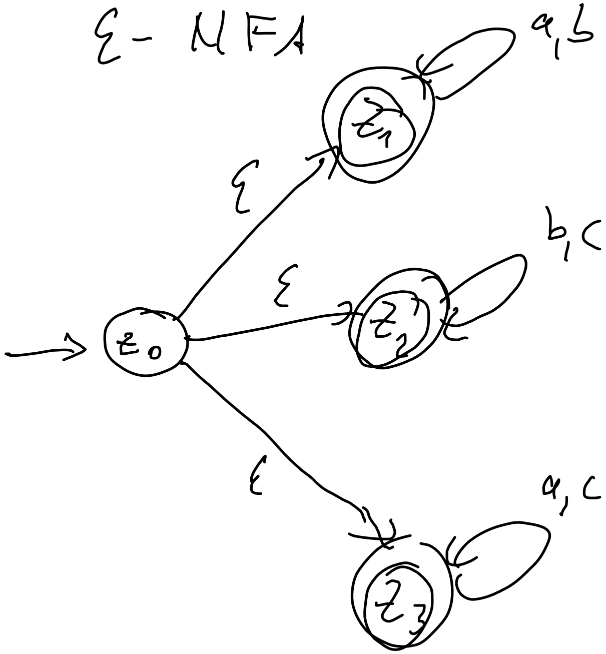
DFAs $T(M) = \{ w \mid \hat{\delta}(z_0, w) \in E \}$

NFAs $T(M) = \{ w \mid \hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset \}$

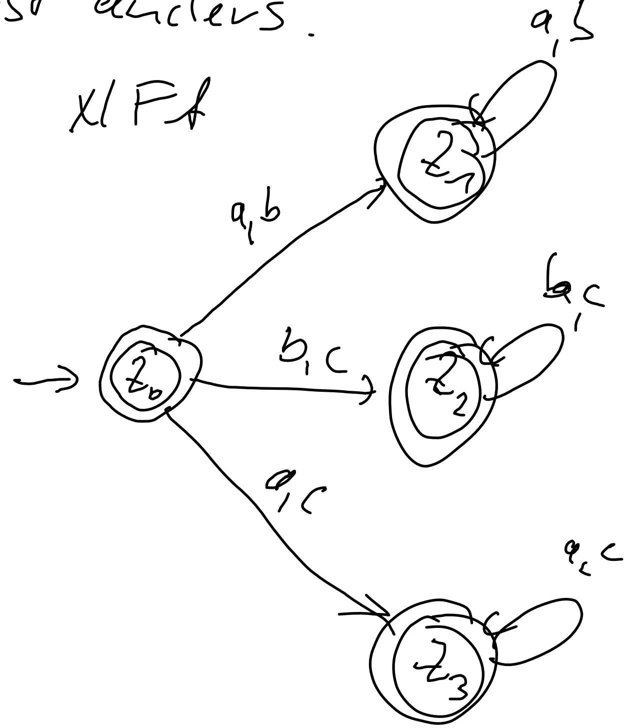
Bsp

Akz. Spr. identisch, Struktur ist anders.

ε-NFA



NFA

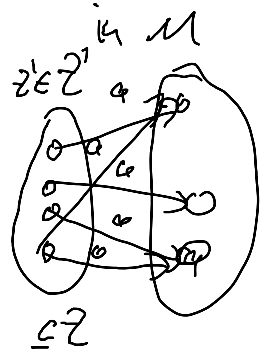


Satz (Rabin, Scott)

Jede von einem NFA akz. Spr. ist durch einen DFA akzeptierbar.

Bew: Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein gegebener NFA. Wir konstr. DFA M', der $T(M)$ akzeptiert. Dabei ist jeder Zustand von M' eine Teilmenge von Z! Also

$$M' = (Z', \Sigma, \delta', z_0', E') \quad \text{mit } z_0' \in Z'$$



wobei

$\rightarrow$ $Z' = P(Z)$

$$\delta'(z', a) = \bigcup_{z \in z'} \delta(z, a) \qquad z' \in Z'$$

$\in Z'$ $\quad$ $\in Z$

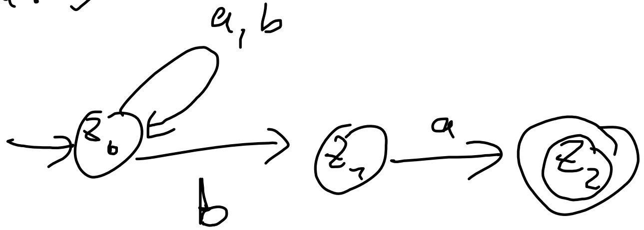
$\in P(Z)$

$\rightarrow$ $z_0' = S$

$\rightarrow$ $E' = \{ z' \in Z' \mid z' \cap E \neq \emptyset \}$

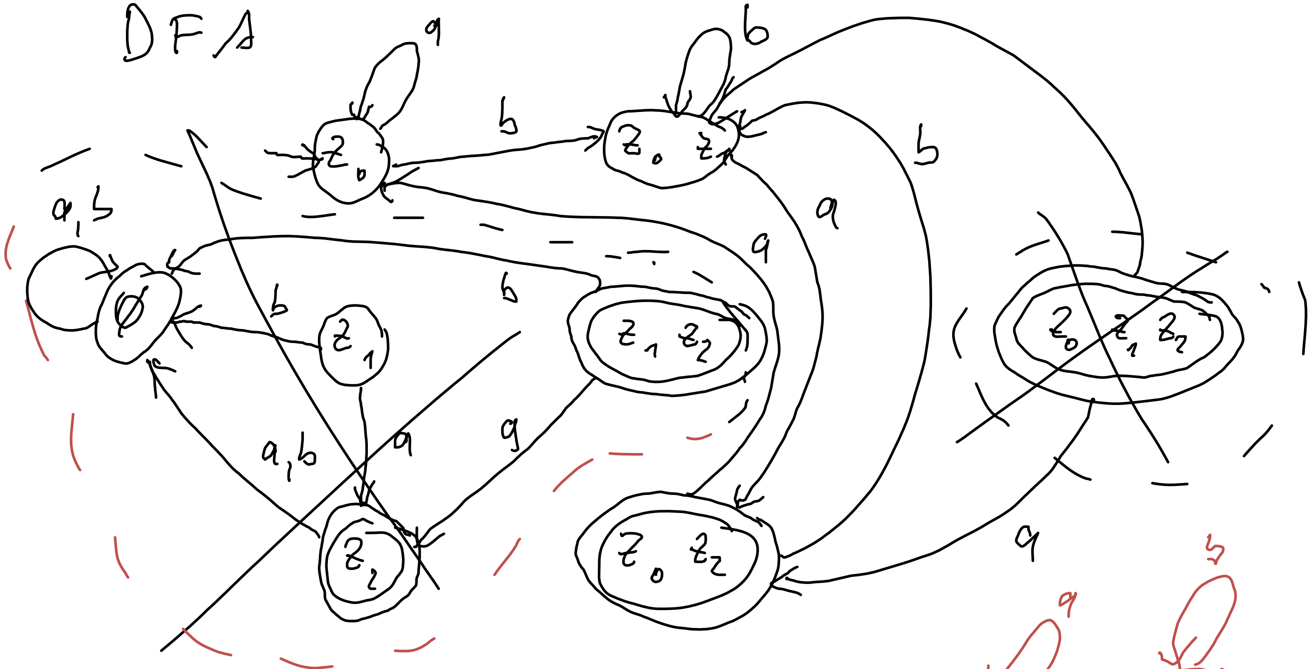
Bsp:

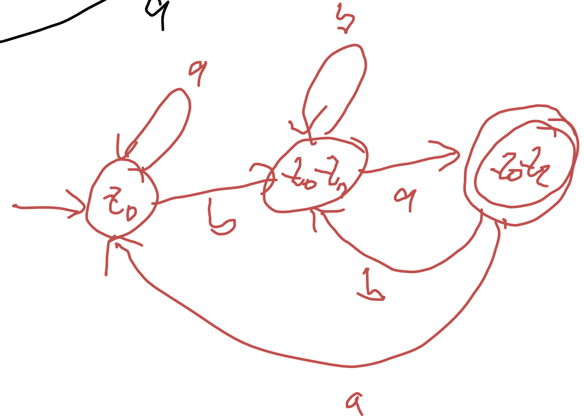
NFA:



$$\{z_0, z_1\} \cup \emptyset = \{z_0, z_1\}$$

DFA





Dann gilt für $a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$

$a_1 a_2 \ldots a_n \in T(M)$

gdw $\hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset \quad w = a_1 a_2 \ldots a_n$

gdw. es ex. $z_0, z_1, \ldots, z_n$ mit $z_i \subseteq Z$ und

$\hat{\delta}(z_i, a_{i+1}) = z_{i+1}$ und $z_n \cap E \neq 0 \quad z_0 = S$

gdw. (nach Konstr. von M') es ex.

$z_0', z_1', \ldots, z_n'$ mit $z_i' \in Z'$ mit

$\hat{\delta}(z_i', a_{i+1}) = z_{i+1}'$ und $z_n \in E'$

gdw.

$a_1 a_2 \ldots a_n \in T(M')$

$\square$

Satz Für jede reguläre Gram $G=(V,\Sigma,P,S)$ gibt es einen NFA M mit $L(G)=T(M)$.

Bew: Sei Typ 3 Gram $G=(V,\Sigma,P,S)$ gegeben.

Wir konstr. NFA $M=(Z,\Sigma,\delta,S',E)$ wie folgt:

$Z = V \cup \{X\}$, mit $X \notin V$

$S' = \{S\}$

$$E = \begin{cases} \{S,X\}, & \text{falls } S \to \varepsilon \in P \\ \{X\}, & \text{falls } S \to \varepsilon \notin P \end{cases}$$

$\delta(A,a) \ni B$ falls $A \to aB \in P$

$\delta(A,a) \ni \underline{X}$ falls $\underline{A \to a} \in P$

Für alle $a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$ mit $n \geq 1$ gilt:

$$a_1 a_2 \dots a_n \in L(G)$$

gdw. es ex. $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ mit

$$S \Rightarrow a_1 A_1 \Rightarrow a_1 a_2 A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} A_{n-1}$$
$$\Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$$

gdw. es ex. Zustandsfolge $A_1, \dots, A_{n-1}$ mit

$$\delta(S, a_1) \ni A_1, \ \delta(A_1, a_2) \ni A_2, \dots \ \delta(A_{n-1}, a_n) \ni X$$

gdw.

$$a_1 a_2 \dots a_n \in T(M)$$

$\Box$