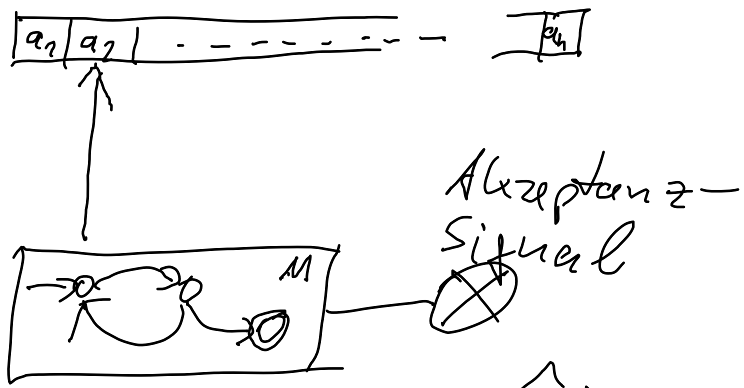
noch 2.2.1 (endl. Automaten)

Automaten erkennen/akzeptieren Worte:



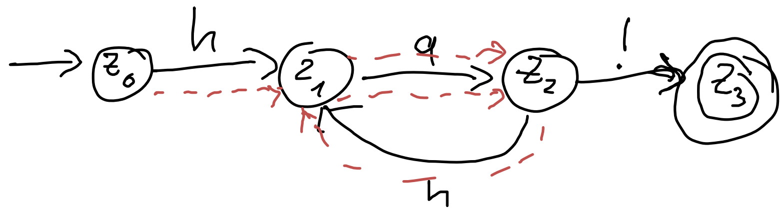
<u>Def</u> (Erweiterung von δ zu $\hat{\delta}$)

Zu gegebenem DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ def. wir

$$\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$$

$$\hat{\delta}(z, \varepsilon) = z$$

$$\hat{\delta}(z, aw) = \hat{\delta}(\overbrace{\delta(z, a)}^{z'}, w) \qquad a \in \Sigma,\ w \in \Sigma^*$$



$$\hat{\delta}(z_0, haha) = z_2$$

$$\hat{\delta}(\underline{\delta(z_0, h)}, aha) = \hat{\delta}(\underline{\delta(\delta(z_0, h), a)}, ha)$$

$$= \hat{\delta}(\delta(\delta(\delta(z_0, h), a), h), a)$$

$$\hat{\delta}(\delta(z_0, h), aha) = \hat{\delta}(z_1, aha)$$

$$= \hat{\delta}(\delta(z_1, a), ha)$$

$$= \dots$$

$$= z_2$$

<u>Def</u> (Akzeptierte Spr.)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA. Dann ist die von M <u>akz. Spr.</u>

$$T(M) = \{ \underline{w} \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(z_0, w) \in \underline{E} \}$$

<u>Bsp</u>: Beispielautomat M

$$T(M) = \{ w \in \{h, a, !\}^* \mid w = (ha)^n!, \; n \geq 1 \}$$

<u>Satz</u> Jede durch einen DFA akz. Spr. ist vom Typ 3.

<u>Bew</u>: Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Spr. und $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$ ein DFA mit $T(M) = A$.
Wir konstruieren eine Typ 3-Gram. mit $L(G) = A$.

Es ist $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

- $V = Z$
- $S = z_0$
- P enthält die folgenden Regeln:

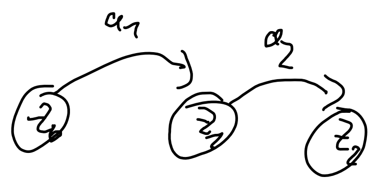
$z_i \to a z_j$ falls $\delta(z_i, a) = z_j$ $\quad a \in \Sigma \quad z_i, z_j \in Z$

$z_i \to a$ falls $\delta(z_i, a) = z_j \wedge z_j \in E$

falls $\varepsilon \in T(M)$ dann

$z_0 \to \varepsilon$ (und u.U. weitere Umstrukturierung)

Dann folgt für alle $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$:



$a_1 a_2 \dots a_n \in T(M)$

<u>gdw.</u> es ex. eine Folge $z_0, z_1, \dots, z_n$, $z_n \in E$,

$\delta(z_{i-1}, a_i) = z_i$, $i = 1, \dots, n$

<u>gdw.</u> es ex. (nach Konstruktion) eine Folge von Variablen $z_0, \dots, z_n$, mit z_0 ist Startvar und

$z_0 \Rightarrow a_1 z_1 \Rightarrow a_1 a_2 z_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 a_2 \dots a_{n-1} z_{n-1} \Rightarrow \underline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$

<u>gdw</u> $a_1 a_2 \dots a_n \in L(G)$

$\square$

2.2.2 Nicht-det. Automaten

Umkehrung zu Beweise: Typ 3-Spr. sind durch Automaten erkennbar.

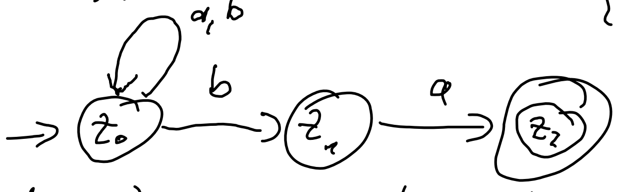
Verallgemeinerung der Automaten notwendig!

→ Nichtdeterministische Automaten

Idee: Für identische Eingaben mehrere Nachfolgezustände möglich.

Intuitiv: Die Maschine wählt/rät die beste Möglichkeit.

Bsp: Alle Worte über $\{a, b\}$, die mit ba enden.



Ein Wort wird akzeptiert, wenn es eine Möglichkeit gibt vom Start- zum Endzustand zu kommen.

Def. (NFA)

Ein nicht-deterministischer, endlicher Automat (NFA) ist ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$

- Z endl. Zustandsmenge
- Σ endl. Eingabealphabet mit $Z \cap \Sigma = \emptyset$
- δ Überführungsfkt. $\delta : Z \times \Sigma \to P(Z)$
- $S \subseteq Z$ Anfangszustände
- $E \subseteq Z$ Endzustände

Def. ($\hat{\delta}$ für NFAs)

Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ ein NFA.

$\hat{\delta} : P(Z) \times \Sigma^* \to P(Z)$ ist def. durch

$$\hat{\delta}(Z', \varepsilon) = Z' \quad \text{für alle } Z' \subseteq Z$$

$$\hat{\delta}(Z', aw) = \bigcup_{z \in Z'} \hat{\delta}(\underline{\delta(z,a)}, w) \quad \text{für alle } Z' \subseteq Z$$

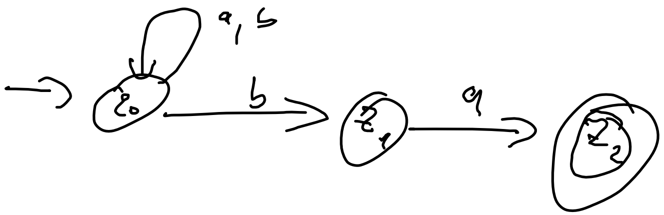
Def (von NFA akz. Spr)

Die von eine NFA M akz Spr. ist

$$T(M) = \{ w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset \}$$

Idee dahinter: wenn wir die Menge allen erreichbaren Zustände betrachte, sind auch die "erfolgreichen" dabei, wenn es welche gibt.

Bsp



Eingabe: abba

$$\hat{\delta}(S, a) = \hat{\delta}(\{z_0\}, a) = \bigcup_{z \in \{z_0\}} \delta(z, a) = \{z_0\}$$

$$\hat{\delta}(\{z_0\}, b) = \bigcup_{z \in \{z_0\}} \delta(z, b) = \{z_0, z_1\}$$

$$\hat{\delta}(\{z_0, z_1\}, b) = \bigcup_{z \in \{z_0, z_1\}} \delta(z, b) = \overset{\delta(z_0, b)}{\overset{\shortparallel}{\{z_0, z_1\}}} \cup \overset{\delta(z_1, b)}{\overset{\shortparallel}{\{\}}} = \{z_0, z_1\}$$

$$\hat{\delta}(\{z_0, z_1\}, a) = \bigcup_{z \in \{z_0, z_1\}} \delta(z, a) = \delta(z_0, a) \cup \delta(z_1, a) = \{z_0\} \cup \{z_2\}$$

$$= \{z_0, z_2\}$$

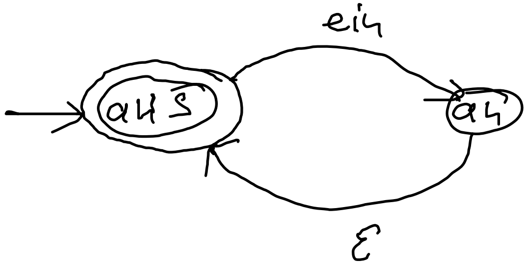
Variation von NFAs

Def (NFA mit ε-Übergängen)

Bei einem NFA mit ε-Übergängen (εNFA) $M=(Z,\Sigma,\delta,S,E)$ hat die Übergangsfkt. die Form

$$\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Z)$$

Bsp: Useless Machine



Bsp Spr über $\Sigma=\{a,b,c\}$: nur Wörter die max 2 verschiedene Zeichen aus Σ enthält (davon aber bel. viele)