

Übungsblatt 10
Abgabe: 16. Januar 2012

Aufgabe 10.1 (Fleißige Looper; je Teilaufgabe 2 Punkte)

Neben der Ackermann-Funktion ist die folgende Funktion $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ein Beispiel für eine totale Funktion, die nicht LOOP-berechenbar ist. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $b(n)$ der maximale Wert, den ein LOOP-Programm berechnen kann, dessen Länge höchstens $n + 1$ ist:

$$b(n) := \max\{res(P) : P \text{ ist ein LOOP-Programm mit } l(P) \leq n + 1\}.$$

Hierbei bezeichne $res(P)$ den Wert der Variable x_0 , den P berechnet, wenn jede in P vorkommende Variable mit 0 vorbelegt ist und wir einschränkend davon ausgehen, dass in LOOP-Programmen nur Wertzuweisungen der Formen $x_i := 0$, $x_i := x_j$ oder $x_i := x_j + 1$ vorkommen. Die Länge eines LOOP-Programms, $l(P)$, ist dann wie folgt rekursiv definiert: $l(P) = 1$, falls P eine Wertzuweisung ist; $l(P) = l(P_1) + l(P_2)$, falls P ein LOOP-Programm der Form $P_1 ; P_2$ ist; und $l(P) = l(P') + 1$, falls P eine LOOP-Anweisung der Form LOOP x_i DO P' END.

- (a) Zeigen Sie, dass in jedem LOOP-Programm P höchstens $2 \cdot l(P)$ verschiedene Variablen vorkommen.
- (b) Ist die Funktion b intuitiv berechenbar? Begründen Sie Ihre Behauptung.
- (c) Zeigen Sie, dass b streng monoton wächst, d.h., dass für beliebige $n < m$ gilt $b(n) < b(m)$.
- (d) Zeigen Sie, dass für beliebige n die Abschätzung $b(n + 3) \geq n \cdot 2^n$ gilt.
- (e) Zeigen Sie, dass b nicht LOOP-berechenbar ist (*Hinweis*: Betrachten Sie LOOP-Programme der Länge ≥ 6 und benutzen Sie die untere Abschätzung aus (d)).

Aufgabe 10.2 (Ganzzahlige Division mit Rest; 3 Punkte)

In Aufgabe 9.1 haben wir “modifizierte” zweistellige Funktionen DIV und MOD für die ganzzahlige Division mit Rest eingeführt, die eine Division durch 0 erlaubten. In dieser Aufgabe sei die Division durch 0 wieder (wie sonst üblich) undefiniert. Definieren Sie DIV und MOD als μ -rekursive Funktionen.

Aufgabe 10.3 (Bijektive μ -rekursive Funktionen; 3 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive, μ -rekursive Funktion, so ist auch deren Umkehrfunktion g^{-1} μ -rekursiv.

Bonusaufgabe 10.4 (Primitiv rekursive Relationen; 4 Punkte)

Eine n -stellige Relation R über $\mathbb{N}$ heißt primitiv rekursiv, wenn dessen charakteristische Funktion $\chi_R : \mathbb{N}^n \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\chi_R(x_1, \dots, x_n) = 1 \iff (x_1, \dots, x_n) \in R$ primitiv rekursiv ist. Zeigen Sie, dass die Klasse der primitiv rekursiven Relationen unter Schnitt, Vereinigung und Komplement abgeschlossen ist.