

Übungsblatt 9  
Abgabe: 9. Januar 2012

**Aufgabe 9.1** (LOOP-berechenbare Funktionen; 3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die zweistelligen Funktionen DIV und MOD LOOP-berechenbar sind. Hierbei bezeichne  $\text{DIV}(x, y)$  den ganzzahligen Divisionsanteil, wenn man  $x \in \mathbb{N}$  durch  $y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  dividiert, und  $\text{MOD}(x, y)$  den Rest (im Sinne der Aufgabe vereinbaren wir, dass für  $y = 0$  beide Funktionen den Wert 0 annehmen).

**Aufgabe 9.2** (Fibonacci-Folge; 3 Punkte)

Die Fibonacci-Folge ist wie folgt rekursiv definiert:  $\text{fib}(0) = 0$ ,  $\text{fib}(1) = 1$  und  $\text{fib}(n) = \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2)$  (für  $n \geq 2$ ). Offensichtlich kann man  $\text{fib}$  als eine Funktion  $\text{fib} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  auffassen. Zeigen Sie auf zwei unterschiedliche Weisen, dass diese Funktion LOOP-berechenbar ist.

**Aufgabe 9.3** (Addition von Binärzahlen; 4 Punkte)

Konstruieren Sie eine Mehrband-Turingmaschine über dem Eingabealphabet  $\{0, 1, \#\}$ , die die Addition von Binärzahlen berechnet, und geben Sie diese in Flussdiagramm-Darstellung an.

*Hinweise:* Alle Binärzahlen außer der 0 beginnen mit einer 1. Nehmen Sie an, dass die beiden Binärzahlen in der Anfangskonfiguration auf dem ersten Band stehen und durch das Symbol # getrennt sind. Versehen Sie in der auf Blatt 8 vorgestellten Flussdiagramm-Darstellung Übergänge und Teil-TM mit einem Index, der das Band bezeichnet, mit dem gearbeitet wird. Die dort eingeführten TM  $r$ ,  $l$  und  $a$  kann man natürlich auch auf ein Band einzuschränken. Auch Lese-Übergänge können sich auf ein Zeichen nur eines Bandes beziehen, da das jeweilige andere Zeichen einfach ignoriert werden kann.

**Aufgabe 9.4** (Jordi und die Lichterkette; 3+2+1 Punkte)

- (a) Nach vielen Jahren im Einsatz funktioniert die große Lichterkette am Nordpol nicht mehr. Der Weihnachtsmann hat den Elfen Jordi damit beauftragt, diese zu reparieren. Da die Kette zwar endlich, aber sehr lang sein kann und Jordi in der Vorweihnachtszeit sehr beschäftigt ist, hat er Sie um Hilfe gebeten. Mit einer verzauberten Turingmaschine, die als Eingabe die Lichterkette bekommt, sollen Sie alle Fehler beheben. Dabei startet die Maschine am linken Ende der Kette auf der ersten Lampe, ein Stück Kabel wird als  $-$ , eine funktionstüchtige Lampe als  $\text{⬆}$  und eine defekte Lampe als  $\text{⬇}$  dargestellt. Die möglichen Fehlerarten sind:

1. Eine Lampe kann defekt sein, d.h. statt  $\text{⬆}$  steht  $\text{⬇}$  auf dem Band. Ersetzen Sie hier die defekte durch eine funktionierende Lampe.

2. Ein Stück Kabel kann fehlen, d.h. statt  $-$  steht  $\square$  auf dem Band. Wie das passieren konnte, weiß Jordi selber nicht so genau, da das Zeichen gar nicht im Eingabealphabet steht. Trotzdem muss die Maschine fehlende Kabel ausbessern. Fügen Sie in diesem Fall ein Stück Kabel ein. Natürlich können auch mehrere Stücke des Kabels hintereinander fehlen. Es kann jedoch keine Lampe fehlen.

Zwei Lampen werden immer von höchstens drei Stücken Kabel getrennt. Die Kette startet und endet mit einer (möglicherweise defekten) Lampe. Formal sieht die Turingmaschine (ohne Zustände und Transitionen) folgendermaßen aus:

$$M = \langle Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E \rangle \text{ mit } \Sigma = \{-, \text{L}, \text{R}\}, \Gamma = \Sigma \cup \{\square\}, z_0 \in Z$$

Vervollständigen Sie die Maschine, indem Sie Zustände und Transitionen einfügen und die Arbeitsweise in den verschiedenen Zuständen erläutern.

*Hinweis:* Beachten Sie, dass die Kette, die am Ende auf dem Band steht, nicht verlängert wurde und dass Ihre Maschine terminiert. Testen Sie sie dazu am besten mit einigen Beispieleingaben.

- (b) Jordi dankt Ihnen für die Maschine, aber weiß aus Erfahrung, dass mit Papier und Bleistift konstruierte Turingmaschinen häufig nicht terminieren. Zeigen Sie, dass Ihre Maschine für jede gültige Eingabe (d.h. eine endliche, ggf. defekte Lichterkette) terminiert.
- (c) Jordi hat kurzfristig gemerkt, dass die Turingmaschine gar nicht garantiert am linken Ende der Kette startet, sondern irgendwo auf der Kette. Die Turingmaschine lässt sich aber nicht mehr löschen, nur noch erweitern (d.h. Sie können nur neue Zustände und Transitionen hinzufügen). Geben Sie eine Modifizierung

$$M' = \langle Z', \Sigma, \Gamma, \delta', z_s, \square, E \rangle \text{ mit } Z' \supseteq Z, \delta' \supseteq \delta, z_s \in Z'$$

der alten Turingmaschine an, um die Lichterkette zu reparieren.

*Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest  
und ein gutes Neues Jahr 2012.*