Informatik III:
Theoretische Informatik

Prof. Bernhard Nebel
Dr. Stefan Wölfl

Wintersemester 2011
Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 6

Abgabe: 5. Dezember 2011

Aufgabe 6.1 (Kontextfreie Grammatik; 1+1+3 Punkte)
Wir betrachten die folgende Grammatik G mit Variablen $V = \{S, A, B, C, D\}$, Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b\}$, Startsymbol S und den folgenden Produktionsregeln P:

$$
\begin{aligned}
&S \to \varepsilon,\\
&S \to aB, S \to bA,\\
&A \to bAA, B \to aBB,\\
&A \to C, B \to D,\\
&C \to aS, D \to bS
\end{aligned}
$$

(a) Beschreiben Sie die Sprache, die von G erzeugt wird.

(b) Geben Sie eine zu G äquivalente, kontextfreie Grammatik G' mit ε-Sonderregel an (zur Erinnerung: die ε-Sonderregel besagt, dass eine Regel der Form $S \to \varepsilon$ erlaubt ist, sofern S die Startvariable ist und nicht auf der rechten Seite von Produktionsregeln vorkommt).

(c) Durch Wahl einer geeigneten Startvariable und Entfernen der ε-Regel erhalten wir aus G' eine Grammatik G'', die alle Wörter aus $L(G)\setminus\{\varepsilon\}$ erzeugt. Transformieren Sie G'' mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren in eine Grammatik in Chomsky-Normalform.

Aufgabe 6.2 (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen; 5 Punkte)
Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei? Falls die Sprache nicht kontextfrei ist, beweisen Sie Ihre Behauptung unter Verwendung des Pumping-Lemmas. Andernfalls reicht eine kurze Begründung (z.B. Angabe einer geeigneten Grammatik).

(a) $L = \{\, a^i b^j c^k \in \{a, b, c\}^* \;:\; i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } k = \max(i, j)\}$;

(b) $L = \{\, a^n b^m b^n a^m \in \{a, b\}^* \;:\; m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq 1\}$.

Aufgabe 6.3 (Reguläre Ausdrücke III; 2 Punkte)
Geben Sie eine Prozedur an, die für zwei reguläre Ausdrücke entscheidet, ob sie äquivalent sind. Zwei reguläre Ausdrücke α und β heißen hierbei äquivalent, falls $L(\alpha) = L(\beta)$.

Aufgabe 6.4 (Teilsprachen-Problem; 2+2 Punkte)
Das Teilsprachen-Problem ist wie folgt definiert:

Gegeben: Sprachen L_1 und L_2.

Frage: Ist L_1 eine Teilsprache von L_2 ($L_1 \subseteq L_2$)?

(a) Zeigen Sie, dass das Teilsprachen-Problem für reguläre Sprachen L_1 und L_2 entscheidbar ist. Geben Sie dazu ein Entscheidungsverfahren an, das auf DFAs für die Sprachen L_1 und L_2 basiert und die Produktautomaten-Konstruktion verwendet.

(b) Wenden Sie Ihr Entscheidungsverfahren auf die folgenden Sprachen an: $L_1 = \{ (ab)^k a : k \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 = \{ w \in \{a, b\}^* : w \text{ beginnt und endet mit } a\}$.

Bonusaufgabe 6.5 (Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen; 3+2 Punkte)

(a) Ist L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ, so ist auch die Sprache aller Suffixe von Wörtern aus L regulär. Zeigen Sie diese Behauptung, indem Sie aus einem NFA für die Sprache L einen ε-NFA für die Sprache der Suffixe von L konstruieren.

Hinweis: $u \in \Sigma^*$ heißt ein Suffix von $w \in \Sigma^*$, falls es ein $v \in \Sigma^*$ gibt mit $w = vu$.

(b) Wenden Sie die Automatenkonstruktionen aus (a) und Aufgabe 6.4 an, um zu entscheiden, ob die Sprache der Suffixe der Sprache $L_1 = \{ (ab)^k a : k \in \mathbb{N}\}$ eine Teilsprache der Sprache $L_2 = \{ w \in \{a, b\}^* : w \text{ beginnt und endet mit } a\}$ ist.