Informatik I

PD Dr. J.-G. Smaus
G. Röger, R. Mattmüller
Wintersemester 2010/2011

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 4

Abgabe: 16. Dezember 2010

Aufgabe 4.1 (Repräsentation endlicher binärer Relationen, 2 × 0,5 Punkte)
Seien $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$, $C = \{x,y,z\}$, $R = \{(1,b),(2,a),(2,c)\} \subseteq A \times B$ und $S = \{(a,y),(b,x),(c,y),(c,z)\} \subseteq B \times C$.

(a) Geben Sie R^{-1} an und notieren Sie die resultierende Relation als Matrix.

(b) Geben Sie $S \circ R$ an und zeichnen Sie das entsprechende Pfeildiagramm.

Aufgabe 4.2 (Reflexivität/Symmetrie/Transitivität, 3 × 0,5 Punkte)
Sei R eine binäre Relation auf A. Beweisen Sie folgende Behauptungen:

(a) R ist reflexiv genau dann, wenn $I_A \subseteq R$.

(b) R ist symmetrisch genau dann, wenn $R^{-1} \subseteq R$.

(c) R ist transitiv genau dann, wenn $R \circ R \subseteq R$.

Aufgabe 4.3 (Äquivalenzrelationen, 1,5 Punkte)
In der Vorlesung wurden die ganzen Zahlen mit Hilfe der Relation $\sim \subseteq (\mathbb{N}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ eingeführt, wobei $(m,n) \sim (m',n')$ genau dann, wenn $m+n' = m'+n$. Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 4.4 (Minimale/kleinste/maximale/größte Elemente, 2 × 0,5 Punkte)
Betrachten Sie die Teilbarkeitsrelation $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definiert durch $a|b$ genau dann, wenn a teilt b, d. h. es existiert ein $c \in \mathbb{N}$ mit $a \cdot c = b$. Seien $B = \{2,3,4,12,24\} \subseteq \mathbb{N}$ und $C = B \cup \{5\} \subseteq \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie alle minimalen und maximalen Elemente von B bzgl. $|$, sowie das größte und kleinste Element von B bzgl. $|$ (falls existent).

(b) Bestimmen Sie alle minimalen und maximalen Elemente von C bzgl. $|$, sowie das größte und kleinste Element von C bzgl. $|$ (falls existent).

Aufgabe 4.5 (Induktionsbeweise, 2 × 1 Punkte)

(a) Zeigen Sie: $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2^n \geq n+1$.

(b) Zeigen Sie: $(\forall n \in \mathbb{N})\ (1-a)^n \geq 1-na$, wenn $0 < a < 1$.

Aufgabe 4.6 (Programme und ihre Korrektheit, 6 × 0,5 Punkte)
Für die Einträge $p(k,n)$, $0 \leq k \leq n$, des *Pascalschen Dreiecks*[1] gilt:

$$p(k,n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = 0 \text{ oder } k = n \\ p(k, n-1) + p(k-1, n-1) & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie eine Prozedur `pascal`, die $p(k,n)$ berechnet (und 0, falls $k > n$).

(b) Schreiben Sie eine Prozedur `pascal-line`, die für gegebenes n die n-te Zeile des Pascalschen Dreiecks, $p(0,n), p(1,n), \ldots, p(n,n)$, als Scheme-Liste zurückgibt.

(c) Schreiben Sie eine Prozedur `pascal-triangle`, die für gegebenes n die ersten n Zeilen des Pascalschen Dreiecks in einer Liste zurückgibt.

(d) Sei $e(n) := p(n,n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweisen Sie, dass $e(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(e) Sei $z(n) := p(n, n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweisen Sie per Induktion, dass $z(n) = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(f) Sei $d(n) := p(n, n+2)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Beweisen Sie per Induktion, dass $d(n) = \sum_{i=1}^{n+1} i$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Abgabe als Datei `pascal.rkt` und auf Papier.

Um für die Programmieraufgaben Punkte zu erhalten, folgen Sie den Konstruktionsanleitungen der Vorlesung, d. h.:

1. Geben Sie die Signatur an.
   Falls die Signatur fehlt, gibt die Aufgabe 0 Punkte.
2. Wählen Sie abhängig von der Signatur das richtige Funktionsgerüst aus.
3. Geben Sie Testfälle an.
4. Schreiben Sie den Funktionsrumpf. Dieser Schritt gliedert sich in weitere Unterschritte, die Sie entsprechend auswählen müssen.
   Sie erhalten für diesen Teil der Aufgabe nur Punkte, wenn Sie Schritte 1 bis 3 befolgt haben.

Die Übungsblätter müssen individuell bearbeitet werden. Gruppenabgaben sind nicht zulässig.

[1] `http://de.wikipedia.org/wiki/Pascalsches_Dreieck`