

Constraint-Satisfaction-Probleme

B. Nebel, S. Wöflf
R. Mattmüller, M. Westphal
Wintersemester 2009/2010

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 9

Abgabe: 23. Dezember 2009

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie mithilfe des Satzes von Schaefer, ob die folgenden Booleschen Constraintsprachen polynomiell oder NP-vollständig sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. (Für NP-vollständige Constraintsprachen brauchen Sie *nicht* detailliert zu beweisen, dass diese *nicht* in die sechs handhabbaren Klassen aus dem Satz von Schaefer fallen.)

- (a) *Färbbarkeit* (mit zwei Farben): nur Ungleichheitsconstraints
- (b) *Parität*: erlaubt sind k -stellige Constraints (für beliebiges $k \in \mathbb{N}_1$), die ausdrücken, dass von k Variablen eine gerade Anzahl mit 1 belegt ist.
- (c) *Balance*: erlaubt sind k -stellige Constraints (für beliebiges gerades $k \in \mathbb{N}_1$), die ausdrücken, dass von k Variablen genau die Hälfte mit 1 belegt ist.
- (d) *Mehrheit*: erlaubt sind k -stellige Constraints (für beliebiges ungerades $k \in \mathbb{N}_1$), die ausdrücken, dass von k Variablen die Mehrheit mit 1 belegt ist.
- (e) *Drittteilung*: erlaubt sind k -stellige Constraints (für beliebige $k \in \mathbb{N}_1$, die Vielfache von 3 sind), die ausdrücken, dass genau ein Drittel von k Variablen mit 1 belegt sind.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Sei $D = \{0, 1\}$ und $\Gamma = \{\neq, R_\vee\}$. Ferner sei die dreistellige Boolesche Operation d definiert als

$$d(x, y, z) := (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z).$$

Beweisen Sie:

- (a) Die Probleme $\text{CSP}(\Gamma)$ und 2-SAT sind polynomiell äquivalent, d.h. sie sind wechselseitig polynomiell aufeinander reduzierbar. (Zur Erinnerung: Eine 2-SAT-Formel ist eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform mit höchstens zwei Literalen pro Klausel.)
- (b) Die Operation d ist ein Polymorphismus von Γ .
- (c) Die Operation d ist eine Fast-Einstimmigkeits-Operation (*near-unanimity operation*).
- (d) 2-SAT ist polynomiell. (Hinweis: verwenden Sie Teile (a), (b) und (c)).