Logik für Informatiker (Diplom)

Prof. Dr. B. Nebel, Prof. Dr. W. Burgard — Universität Freiburg
Wintersemester 2007/2008 — Institut für Informatik

Übungsblatt 9

Abgabe: Dienstag, 8. Januar 2008

Aufgabe 9.1 (Unifikation und Substitutionen)

(a) Geben Sie für die Literale $L_1 = \neg P(x, f(y))$, $L_2 = \neg P(z, f(g(a, w)))$ und $L_3 = \neg P(g(v, v), v)$ Unifikatoren sub_1 und sub_2 von $\{L_1, L_2, L_3\}$ an, so dass $L_1 sub_1$ eine Variable und $L_1 sub_2$ keine Variable enthält. Zeigen Sie, dass sub_2 kein allgemeinster Unifikator von $\{L_1, L_2, L_3\}$ ist.

(b) Wenden Sie den Unifikationsalgorithmus auf die Literalmenge $\mathbf{L}$ an mit $\mathbf{L} = \{P(f(x), g(f(u), y), y), \quad P(y, g(y, y), f(z)), \quad P(f(z), w, y)\}$.

(c) Geben Sie entflochtene Versionen der Substitutionen $s_1 s_2$, $s_2 s_3$ und $s_1 s_2 s_3$ für $s_1 = [x/f(v)][y/u]$, $s_2 = [z/u][v/a]$ und $s_3 = [u/f(a)]$ an.

Aufgabe 9.2 (Prädikatenlogische Resolution)

(a) Geben Sie je eine prädikatenlogische Resolvente der beiden Klauseln $K_1 = \{P(x), P(f(x)), R(x)\}$ und $K_2 = \{\neg P(f(y)), \neg P(f(z)), R(f(y))\}$ mit genau zwei, genau drei und genau vier Literalen an.

(b) Zeigen Sie, dass $\square \in \text{Res}^*(\{K_1, K_2, K_3, K_4\})$ für $K_1 = \{\neg P(x, y), P(x, f(y))\}$, $K_2 = \{\neg P(y, x), P(g(y), x)\}$, $K_3 = \{P(x, x)\}$ und $K_4 = \{\neg P(g(g(x)), f(x))\}$.

Aufgabe 9.3 (Lifting-Lemma)

Vollziehen Sie den Beweis des Lifting-Lemmas anhand der folgenden Grundresolution nach, d. h. geben Sie an, welche prädikatenlogische Resolution daraus entsteht (insbesondere s_1, s_2 und sub).

$$
\begin{tikzcd}
\{\neg P(x), \neg P(f(a)), Q(y)\} \arrow[d, "{[x/f(a)][y/b]}"] & & \{P(y)\} \arrow[d, "{[y/f(a)]}"] \\
\{\neg P(f(a)), Q(b)\} \arrow[dr, dash] & & \{P(f(a))\} \arrow[dl, dash] \\
& \{Q(b)\} &
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 9.4 (Automatische Theorembeweiser)

In dieser Aufgabe sollen Sie mit Hilfe von Prover9[1], einem automatischen Theorembeweiser, die Gültigkeit einiger Sätze zeigen. Modellieren und beantworten Sie folgende Fragestellungen mit Hilfe von Prover9:

[1] Website: `http://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/`
Download: `http://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/download/`
Beispiele: `http://www.cs.unm.edu/~mccune/prover9/manual-examples.html`

(a) Axiome (Gruppentheorie):

- Assoziativität: $\forall x \forall y \forall z((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z))$
- Linksneutrales Element: $\forall x(e \circ x = x)$
- Linksinverse Elemente: $\forall x(x^{-1} \circ x = e)$

Folgerungen:

- Rechtsneutrales Element: $\exists y \forall x(x \circ y = x)$
- Rechtsinverse Elemente: $\forall x \exists y(x \circ y = e)$
- Linksneutrales Element ist rechtsneutral: $\forall x(x \circ e = x)$
- Linksinverse Elemente sind rechtsinvers: $\forall x(x \circ x^{-1} = e)$
- (Rechts)neutrales Element ist eindeutig: $\forall y(\forall x(x \circ y = x) \rightarrow y = e)$
- (Rechts)inverse Elemente sind eindeutig: $\forall x \forall y(x \circ y = e \rightarrow y = x^{-1})$
- Inverses von Verknüpfung: $\forall x \forall y((x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1})$
- Kürzungsregel: $\forall x \forall y \forall z(x \circ y = x \circ z \rightarrow y = z)$

Sie können ein Konstantensymbol `e`, ein einstelliges Funktionssymbol `inv` und ein zweistelliges Funktionssymbol `+` (in Infixnotation) verwenden.

(b) Axiome (Graphfärbbarkeit, 3-Färbbarkeit):

- Der Graph enthält keine Kanten (x, x).
- Die Kantenrelation ist symmetrisch (ungerichtete Kanten).
- Kein Knoten hat mehr als eine Farbe.
- Benachbarte Knoten haben unterschiedliche Farben.
- Jeder Knoten hat eine der drei Farben Rot, Grün und Blau.

Folgerung:

- Der Graph enthält keine 4-Clique als Teilgraphen.

(c) Axiome:

- Ein Tier ist ein Fleischfresser gdw. es andere Tiere frisst.
- Ein Tier ist ein Vegetarier gdw. es keine anderen Tiere frisst.
- Ein Tier ist ein Metavegetarier gdw. es keine Fleischfresser frisst.

Folgerung:

- Vegetarier sind Metavegetarier.

Prover9 wird mit dem Kommando `prover9 -f <infile>` aufgerufen.

Die von Ihnen erstellten Eingabedateien für Prover9 und die von dem Theorembeweiser erzeugten Ausgaben sollten Sie bis zum 8. Januar 2008, 16 Uhr, per E-Mail an `mattmuel@informatik.uni-freiburg.de` abgeben.

Die Übungsblätter dürfen und sollten in Gruppen von zwei Studenten bearbeitet werden. Bitte schreiben Sie beide Namen auf Ihre Lösung.