Logik für Informatiker (Diplom)

Prof. Dr. B. Nebel, Prof. Dr. W. Burgard
Wintersemester 2007/2008

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Übungsblatt 5

Abgabe: Dienstag, 27. November 2007

Aufgabe 5.1 (Formalisierung in Prädikatenlogik)

Seien E und T ein- bzw. zweistelliges Prädikaten-, g und ℓ Konstanten- und k und u ein- bzw. zweistellige Funktionssymbole. Die intendierte Semantik der Symbole sei durch die Struktur $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ mit $U_\mathcal{A} = 2^\mathbb{N}$, $E^\mathcal{A} = \{M \in 2^\mathbb{N} \mid M \text{ endlich}\}$, $T^\mathcal{A} = \{(M, N) \in 2^\mathbb{N} \times 2^\mathbb{N} \mid M \subseteq N\}$, $g^\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ gerade}\}$, $\ell^\mathcal{A} = \emptyset$, $k^\mathcal{A}(M) = \mathbb{N} \setminus M$ für alle $M \subseteq \mathbb{N}$ und $u^\mathcal{A}(M, N) = M \cup N$ für alle $M, N \subseteq \mathbb{N}$ gegeben. Symbolisieren Sie:

(a) Nicht alle Teilmengen der natürlichen Zahlen sind unendlich.
(b) Nicht zu jeder Menge von natürlichen Zahlen gibt es eine echte Obermenge.
(c) Es gibt eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, die alle Teilmengen von $\mathbb{N}$ umfasst.
(d) Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge natürlicher Zahlen.
(e) Jede Menge von natürlichen Zahlen, die die Menge aller geraden Zahlen umfasst, ist unendlich.
(f) Die Vereinigung jeder Menge von natürlichen Zahlen mit ihrem Komplement umfasst jede Menge von natürlichen Zahlen.

Aufgabe 5.2 (Modellbeziehung in der Prädikatenlogik)

Seien R und T zweistellige Prädikaten-, c und d Konstanten- und f und g ein- bzw. zweistellige Funktionssymbole. Sei ferner $\mathcal{A} = (U_\mathcal{A}, I_\mathcal{A})$ mit $U_\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, 8\}$, $R^\mathcal{A} = \{(3,5), (5,3), (6,7), (7,6)\}$, $T^\mathcal{A} = \{(u, u') \in U_\mathcal{A}^2 \mid u < u'\}$, $c^\mathcal{A} = 1$, $d^\mathcal{A} = 7$, $f^\mathcal{A}(1) = f^\mathcal{A}(2) = 5, f^\mathcal{A}(3) = f^\mathcal{A}(6) = f^\mathcal{A}(7) = f^\mathcal{A}(8) = 8, f^\mathcal{A}(4) = f^\mathcal{A}(5) = 7$, $g^\mathcal{A}(u, u') = \min(u, u')$ für alle $u, u' \in U_\mathcal{A}$ und $x^\mathcal{A} = 6$.

(a) Bestimmen Sie $\mathcal{A}(g(f(f(c)), f(c)))$ und $\mathcal{A}(f(g(f(c), d)))$.
(b) Entscheiden Sie, ob $\mathcal{A} \models F_i$ für $F_1 = \exists y R(x, y)$, $F_2 = \forall x \exists y R(x, y)$, $F_3 = \exists x R(x, g(c, d))$, $F_4 = \forall x T(x, f(x))$.

Aufgabe 5.3 (Überführungslemma (Formeln))

Zeigen Sie, dass für jede prädikatenlogische Formel F, jede Variable x und jeden Term t, der keine in F gebundene Variable enthält, gilt: $\mathcal{A} \models F[x/t]$ gdw. $\mathcal{A}[x/t^\mathcal{A}] \models F$.

Aufgabe 5.4 (Äquivalenzen)

Seien P und Q zweistellige Prädikatensymbole. Zeigen Sie durch Angabe geeigneter Strukturen, dass

- $\forall x(P(x, x) \vee Q(x, x)) \not\models (\forall x P(x, x) \vee \forall x Q(x, x))$.
- $\forall x \exists y P(x, y) \not\models \exists y \forall x P(x, y)$

Die Übungsblätter dürfen und sollten in Gruppen von zwei Studenten bearbeitet werden. Bitte schreiben Sie beide Namen auf Ihre Lösung.