Spieltheorie

Prof. Dr. Bernhard Nebel

LaTeX-Umsetzung: Ingo Thon, Robert Mattmüller, Malte Helmert

{nebel, thon, mattmuel, helmert}@informatik.uni-freiburg.de

Wintersemester 2007/2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Was ist Spieltheorie?

Spieltheorie ist die Analyse strategischer Entscheidungssituationen, in denen mehrere Spieler miteinander interagieren.

Dabei ist das Resultat eines Spiels von den Entscheidungen der Mitspieler abhängig und alle Spieler sind sich dessen bewusst. Damit stellt sich die Frage nach dem Ergebnis, das sich ergibt, falls alle Spieler „rational" handeln, d.h. ihren (erwarteten) Nutzen maximieren, wobei sie davon ausgehen, dass ihre Mitspieler ebenso rational handeln.

Ursprünglich ist die Spieltheorie ein Gebiet der theoretischen Wirtschaftswissenschaften, neuerdings jedoch auch für Künstliche Intelligenz und Informatik von Interesse, wenn es darum geht, dezentrale, heterogene Systeme von egoistischen Agenten zu modellieren. Während Lösungsbegriffe für Spiele bereits bekannt sind, sind noch viele algorithmische Fragen zu behandeln. Da die Annahme der Rationalität im Fall von künstlichen Agenten berechtigter ist als im Fall natürlicher Agenten, ist die Spieltheorie für die Informatik unter Umständen noch sinnvoller und interessanter als für die Wirtschaftswissenschaft.

Beispiel 1 (Anflugmanagement an Flughäfen)**.** Heute: First-come-first-served, besser wäre aber ein Anflugscheduling unter Berücksichtigung der verbleibenden Flugbenzinmengen der ankommenden Flugzeuge. Bei mehreren Fluglinien werden Online-Verhandlungen notwendig.

1.2 Gebiete der Spieltheorie

Zu den Gebieten der Spieltheorie gehören unter anderem sogenannte **strategische Spiele (Normalform-Spiele)**, bei denen die Strategien vor Beginn des Spiels festgelegt werden und das Spielergebnis aus der Strategiekombination resultiert.

Beispiel 2 (Gefangenendilemma)**.** Zwei Gefangene werden getrennt voneinander verhört und haben die Wahl, die ihnen vorgeworfene Tat zu gestehen und dabei den anderen Gefangenen zu belasten oder zu schweigen. Mögliche Ausgänge sind dann, dass

1. beide schweigen, worauf sie mit je drei Monaten Haft bestraft werden,
2. nur einer gesteht, der andere aber schweigt, woraufhin der Kronzeuge frei kommt, während der „Schweiger" zu zehn Jahren Haft verurteilt wird, oder dass
3. beide gestehen, was für beide eine dreijährige Haftstrafe bedeutet.

Daneben werden **extensive Spiele**, d.h. Spiele mit mehreren Zügen, wie etwa Schach oder wiederholte strategische Spiele, untersucht.

Es wird zwischen Spielen mit **vollständigen** und **unvollständigen Informationen** unterschieden, wobei etwa bei Kartenspielen den Spielern in der Regel nur unvollständige Informationen vorliegen.

Koalitions- oder Verhandlungsspiele modellieren Situationen wie Verhandlungen, Verteilungen von Gewinnen oder Wahlen.

In der **Implementierungstheorie (Mechanismusdesign)** betrachtet man Spiele nicht nur aus der Sicht der Spieler, sondern auch aus der eines „Spieledesigners", der die Spielregeln so festlegen will, dass der Gesamtnutzen aller Spieler optimiert wird.

Die wichtigsten **Lösungskonzepte** der Spieltheorie sind die Elimination dominierter Strategien, Nash-Gleichgewichte und weitere Gleichgewichtsbegriffe.

2 Strategische Spiele

Definition 3 (Strategisches Spiel)**.** Ein **strategisches Spiel** $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ besteht aus

- einer endlichen **Spielermenge** N,
- für jeden Spieler $i \in N$ einer nichtleeren Menge A_i (von **Aktionen/Strategien**) und
- für jeden Spieler $i \in N$ einer **Auszahlungsfunktion** $u_i : A \to \mathbb{R}$, wobei

$$A = \prod_{i \in N} A_i.$$

G heißt endlich, falls A endlich ist.

Oft wird statt einer Auszahlungsfunktionen eine **Präferenzrelation** $\succeq_i$ für Spieler i genutzt:

$$a \succeq_i b \text{ gdw. } u_i(a) \geq u_i(b)$$

Endliche strategische Spiele werden oft in **Matrixform** angegeben, wie etwa das folgende Spiel mit zwei Spielern und je zwei möglichen Aktionen. Spieler 1 ist der Zeilenspieler, Spieler 2 der Spaltenspieler. Bei den Auszahlungen ist jeweils der erste Wert der Nutzen für Spieler 1, der zweite Wert der Nutzen für Spieler 2.

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	T	w_1, w_2	x_1, x_2
	B	y_1, y_2	z_1, z_2

Wählt Spieler 1 Aktion T und Spieler 2 Aktion L, dann erhält Spieler 1 die Auszahlung w_1, Spieler 2 erhält die Auszahlung w_2.

Beispiel 4 (Gefangenendilemma)**.** S sei die Strategie, zu schweigen, G die Strategie, zu gestehen. Die Auszahlungen sind in Gefängnismonaten angegeben.

	S	G
S	$-3, -3$	$-120, \ 0$
G	$0, -120$	$-36, -36$

Beispiel 5 (Falke und Taube)**.** Die Spieler können sich in einem Kampf (etwa um Nahrung) wie ein Falke (F) oder wie eine Taube (T) verhalten. Treffen zwei Tauben aufeinander, teilen sie sich den Nutzen, trifft ein Falke auf eine Taube, gewinnt der Falke und sichert sich einen großen Teil des Nutzens, treffen aber zwei Falken aufeinander, so geht in dem Kampf der beiden der gesamte Nutzen verloren.

	T	F
T	$3,3$	$1,4$
F	$4,1$	$0,0$

Beispiel 6 (Matching Pennies)**.** Zwei Spieler wählen jeweils Kopf (K) oder Zahl (Z). Wählen beide das gleiche, gewinnt Spieler 1 einen Euro von Spieler 2, wählen sie etwas unterschiedliches, erhält Spieler 2 einen Euro von Spieler 1.

	K	Z
K	$1,-1$	$-1,\ \ 1$
Z	$-1,\ \ 1$	$1,-1$

Beispiel 7 (Bach oder Strawinsky)**.** Zwei Personen wollen gemeinsam ein Konzert besuchen, wobei eine der beiden Personen Bach bevorzugt, während die andere Strawinsky vorzieht. Beiden ist es wichtiger, in das gleiche Konzert zu gehen wie der Partner, als ihr Lieblingskonzert zu besuchen. Sei B die Aktion, das Bach-Konzert zu besuchen, S die Aktion, in das Strawinsky-Konzert zu gehen.

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	$2,1$	$0,0$
	S	$0,0$	$1,2$

2.1 Dominierte Strategien

Notation 8. Sei $a = (a_i)_{i \in N}$ ein **Strategieprofil** ($a \in A = \prod_{i \in N} A_i$). Dann ist $a_{-i} := (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$ und $(a_{-i}, a_i) = (a_j)_{j \in (N \setminus \{i\}) \cup \{i\}} = (a_j)_{j \in N} = a$.

Definition 9 (Strikt dominierte Strategie)**.** Eine Aktion $a_j^* \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt strikt dominiert, falls es eine Aktion $a_j' \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt:

$$u_j(a_{-j}, a_j') > u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

Bemerkung 10. Es ist nicht rational, strikt dominierte Strategien zu spielen.

2.1.1 Iterative Elimination strikt dominierter Strategien

- Streiche die Strategien, die strikt dominiert sind, solange welche da sind.
- Bleibt nur ein Profil übrig, ist das die Lösung.

Beispiel 11. Streiche zunächst die von der zweiten Zeile strikt dominierte erste Zeile, danach die von der zweiten Spalte strikt dominierte erste Spalte:

	S	G
S	~~3,3~~	~~0,4~~
G	4,0	1,1

	S	G
G	~~4,0~~	1,1

Beispiel 12. Iterative Elimination strikt dominierter Strategien in drei Schritten:

	L	R
T	2,1	0,0
M	1,2	2,1
B	~~0,0~~	~~1,1~~

	L	R
T	2,1	~~0,0~~
M	1,2	~~2,1~~

	L
T	2,1
M	~~1,2~~

Bemerkung 13. Nur in den seltensten Fällen existiert strikte Dominanz.

Bemerkung 14. Das Ergebnis der iterativen Elimination ist bei strikter Dominanz eindeutig (unabhängig von der Reihenfolge der Elimination).

Definition 15 (Schwach dominierte Strategien)**.** Eine Aktion $a_j^* \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt schwach dominiert, falls es eine Aktion $a_j' \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$

$$u_j(a_{-j}, a_j') \geq u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

und für mindestens ein $a \in A$

$$u_j(a_{-j}, a_j') > u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

Beispiel 16. Das Ergebnis bei iterativer Elimination schwach dominierter Strategien ist im allgemeinen nicht eindeutig, sondern von der Eliminationsreihenfolge abhängig. Betrachte dazu folgendes Spiel:

	L	R
T	$2,1$	$0,0$
M	$2,1$	$1,1$
B	$0,0$	$1,1$

Eliminiert man zuerst T ($\leq$ M), dann L ($\leq R$), so hat jedes noch mögliche Ergebnis (MR oder BR) das Nutzenprofil $(1,1)$. Die alternative Reihenfolge, bei der zuerst B ($\leq$ M), dann R ($\leq L$) eliminiert wird, führt hingegen in beiden verbleibenden Strategieprofilen (TL und ML) zu dem Nutzenprofil $(2,1)$, das Spieler 1, durch dessen unterschiedliche Wahlmöglichkeiten bei der Eliminierung einer schwach dominierten Strategie die unterschiedlichen verbleibenden Strategieprofile überhaupt entstanden sind, einen höheren Nutzen bringt als die beiden im anderen Fall verbleibenden Strategieprofile MR und BR.

2.2 Nash-Gleichgewichte

Nash-Gleichgewichte sind das meistbenutzte Lösungskonzept der Spieltheorie. Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategiekombination, in der kein Spieler durch Abweichung einen Vorteil erlangen kann.

Beispiel 17. Nash-Gleichgewichte bei Bach oder Strawinsky:

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	$2,1$	$0,0$
	S	$0,0$	$1,2$

Hier existieren zwei Nashgleichgewichte, nämlich (B, B) und (S, S).

Definition 18 (Nash-Gleichgewicht)**.** Ein **Nash-Gleichgewicht (NG)** eines strategischen Spieles $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ist ein Profil $a^* \in A$ von Aktionen mit der Eigenschaft, dass für alle Spieler $i \in N$ gilt:

$$u_i(a^*) = u_i(a^*_{-i}, a^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i) \qquad \text{für alle } a_i \in A_i.$$

Definition 19 (Nash-Gleichgewicht, alternativ)**.** Sei $B_i(a_{-i})$ die Menge von Aktionen $a_i \in A_i$, die eine beste Reaktion auf a_{-i} sind, d.h.

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \mid u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a'_i) \text{ für alle } a'_i \in A_i\}.$$

Ein Nash-Gleichgewicht a^* ist ein Profil mit der Eigenschaft

$$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*) \quad \text{für alle } i \in N.$$

Wir betrachten auch $B(a^*)$:

$$B(a^*) = \prod_{i \in N} B_i(a_{-i}^*)$$

Mit dieser Notation ist a^* ein Nash-Gleichgewicht gdw. $a^* \in B(a^*)$.

Beispiel 20. Im Gefangenendilemma gibt es genau ein Nash-Gleichgewicht:

	S	G
S	$3, 3$	$0, 4$
G	$4, 0$	$\mathbf{1, 1}$

Beispiel 21. Im Falke-und-Taube-Spiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte:

	Taube	Falke
Taube	$3, 3$	$\mathbf{1, 4}$
Falke	$\mathbf{4, 1}$	$0, 0$

Beispiel 22. Im Matching-Pennies-Spiel gibt es kein Nash-Gleichgewicht:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1, -1$	$-1, 1$
Zahl	$-1, 1$	$1, -1$

Beispiel 23 (Auktionsspiel)**.** Eine *Second Price Sealed Bid Auction* läuft wie folgt ab: Alle Auktionsteilnehmer geben ein geheimes Gebot für das zu versteigernde Objekt ab. Das höchste Gebot erhält den Zuschlag, wobei ein Betrag bezahlt werden muss, der dem *zweithöchsten* abgegebenen Gebot entspricht.

Formal ergibt sich folgendes Spiel $\langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$:

- $N = \{1, \ldots, n\}$, wobei $n \geq 2$. Wir schreiben $v_i \in \mathbb{R}$ für den *Wert* (in Euro), den Spieler i dem zu versteigernden Objekt zumisst. Das Auktionsspiel wird durch die Werte v_i parametrisiert. Wir fordern, dass $v_1 > v_2 > \cdots > v_n > 0$ gilt.

- Für alle $i \in N$ ist $A_i = \mathbb{R}^+$. Dabei entspricht $a_i \in A_i$ einem Gebot von a_i Euro.

- Die Nutzenfunktionen u_i sind wie folgt definiert: Erhält Spieler i den Zuschlag, so ist $u_i(a) = v_i - \max a_{-i}$. Der Spieler erhält das Objekt (Nutzen v_i), muss aber den höchsten von den anderen Spielern gebotenen Betrag bezahlen (Ausgabe $\max a_{-i}$). Wenn Spieler i den Zuschlag nicht erhält, dann ist $u_i(a) = 0$. Spieler i erhält in a den Zuschlag, wenn $a_i = \max a$ gilt und i die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Bei gleichen Geboten wird also der Spieler mit dem niedrigsten Index bevorzugt.

Eine schwach dominante Strategie für Spieler i besteht darin, v_i zu bieten. Für den Beweis der schwachen Dominanz ist zu zeigen, dass v_i eine beste Antwort auf alle Aktionsprofile a_{-i} der anderen Spieler ist und es zu jedem anderen Gebot a_i mindestens ein Profil a_{-i} gibt, auf das v_i eine echt bessere Antwort ist als a_i.

Für die zweite Eigenschaft sehen wir, dass v_i echt besser ist als $a_i \neq v_i$, wenn alle anderen Spieler $\frac{1}{2}(v_i + a_i)$ bieten.

Für die erste Eigenschaft unterscheiden wir zwei Fälle: Erhält Spieler i in $a = (a_{-i}, v_i)$ den Zuschlag, ergibt sich $v_i \geq \max a_{-i}$ und somit $u_i(a) = v_i - \max a_{-i} \geq 0$, also ein nichtnegativer Nutzen. Eine bessere Strategie gibt es nicht: Ohne den Zuschlag hätte i den Nutzen 0, und andere Strategien, die zum Zuschlag führen, bieten denselben Nutzen.

Erhält Spieler i in $a = (a_{-i}, v_i)$ nicht den Zuschlag, so ergibt sich ein Nutzen von 0. Wiederum geht es nicht besser: Andere Strategien, die nicht zum Zuschlag führen, haben den Nutzen 0, und Strategien, die zum Zuschlag führen, haben einen Nutzen von höchstens 0, da $\max a_{-i} \geq v_i$ ist (sonst hätte Spieler i bereits mit dem Gebot v_i den Zuschlag erhalten). Somit ist v_i in jedem Fall eine beste Antwort.

Ein Profil schwach dominanter Strategien a^* bildet stets ein Nash-Gleichgewicht: Da eine schwach dominante Strategie eine beste Antwort auf *alle* Strategieprofile ist, ist a_i^* insbesondere für jeden Spieler i eine beste Antwort auf a_{-i}^*.

2.2.1 Iterative Eliminierung und Nash-Gleichgewichte

Lemma 1. *Seien $G = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ und $G' = \langle N, (A_i')_{i\in N}, (u_i')_{i\in N}\rangle$ strategische Spiele, so dass G' aus G durch Elimination* einer *strikt dominierten Strategie entsteht. Dann gilt: a^* ist ein Nash-Gleichgewicht von G genau dann, wenn a^* ein Nash-Gleichgewicht von G' ist.*

Beweis. Sei a_i die Strategie für Spieler i, die beim Übergang von G zu G' eliminiert wird. Es gibt also eine Strategie $a_i^+ \in A_i$, so dass $u_i(a_{-i}, a_i) < u_i(a_{-i}, a_i^+)$ für alle $a_{-i} \in A_{-i}$.

Sei zuerst a^* ein Nash-Gleichgewicht von G. Dann ist a_i^* eine beste Antwort auf a_{-i}^*, es gilt also $u_i(a^*) = u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a_i')$ für alle $a_i' \in A_i$, also insbesondere $u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$. Da aufgrund der strikten Dominanz $u_i(a_{-i}^*, a_i) < u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$ gilt, muss $a_i^* \neq a_i$ sein.

Die Gleichgewichtsstrategien a_j^* werden beim Übergang zu G' also nicht eliminiert. Für alle Spieler $j \in N$ ist a_j^* in G eine beste Antwort auf a_{-j}^*. Wegen $A_j' \subseteq A_j$ gilt dies dann natürlich auch in G'. Somit ist a^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G'.

Sei umgekehrt a'^* ein Nash-Gleichgewicht von G'. Zu zeigen ist, dass a'^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G ist. Da für alle Spieler j die Beziehung $A_j \supseteq A_j'$ gilt, ist dazu nur zu zeigen, dass $a_i'^*$ auch in G eine beste Antwort auf $a_{-i}'^*$ ist. Für Spieler $j \neq i$ muss $a_j'^*$

eine beste Antwort auf a'^*_{-j} sein, da $A_j = A'_j$ gilt und somit die Bedingungen für G und G' identisch sind.

Da $A_i = A'_i \cup \{a_i\}$ ist und a'^*_i unter den Strategien in A'_i eine beste Antwort auf a'^*_{-i} ist, müssen wir nur zeigen, dass a_i keine bessere Antwort ist. Dies folgt daraus, dass einerseits $u_i(a'^*) = u_i(a'^*_{-i}, a'^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a^+_i)$ (da a'^* ein Nash-Gleichgewicht in G' ist und $a^+_i \in A'_i$ ist) und andererseits $u_i(a'^*_{-i}, a_i) < u_i(a'^*_{-i}, a^+_i)$ (da a_i von a^+_i dominiert wird) gilt. Also ist a'^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G. □

Satz 2. *Wenn ein strategisches Spiel sich durch die Methode der iterativen Eliminierung eindeutig lösen lässt, so ist das resultierende Strategieprofil ein Nash-Gleichgewicht, und zwar das einzige Nash-Gleichgewicht in diesem Spiel.*

Beweis. Mehrfache Anwendung von Lemma 1 (Induktion) ergibt, dass zwei Spiele G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, wenn G' aus G durch iterative Eliminierung entsteht.

Liefert nun das Verfahren der iterativen Eliminierung, ausgehend von G, das Spiel G' als eindeutige Lösung, so hat in G' jeder Spieler nur eine Strategie. Das einzig mögliche Strategieprofil in G' ist automatisch ein Nash-Gleichgewicht in G', und zwar das einzige. Da G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, folgt die Behauptung. □

Zusammenfassend lässt sich über die Existenz und Eindeutigkeit von Nash-Gleichgewichten folgendes sagen: Es gibt strategische Spiele, wie etwa Matching Pennies, in denen keine Nash-Gleichgewichte existieren. In endlichen strategischen Spielen gibt es jedoch immer mindestens ein Nash-Gleichgewicht, wenn wir zulassen, dass die Spieler ihre Strategien randomisieren. Nash-Gleichgewichte sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Sind die Auszahlungsfunktionen in Matrixform gegeben, so können Nash-Gleichgewichte einfach berechnet werden, für randomisierte Spiele ist das (vermutlich) nicht der Fall.

2.3 Strikt kompetitive Spiele und Maximin-Strategien

Definition 24 (Strikt kompetitive oder Nullsummenspiele)**.** Ein **strikt kompetitives Spiel** oder **Nullsummenspiel** ist ein strategisches Spiel $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ mit

$$u_1(a) = -u_2(a) \qquad \text{für alle } a \in A.$$

Beispiel 25. Matching Pennies:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1, -1$	$-1, \quad 1$
Zahl	$-1, \quad 1$	$1, -1$

Beispiel 26. Ein Spiel mit je drei Aktionen pro Spieler:

	L	M	R
T	$8, -8$	$3, -3$	$-6, \quad 6$
M	$2, -2$	$-1, \quad 1$	$3, -3$
B	$-6, \quad 6$	$4, -4$	$8, -8$

Es existiert kein Nash-Gleichgewicht, denn alles, was dem einen Spieler nutzt, schadet dem anderen und umgekehrt. Versuche also, den eigenen Schaden zu minimieren.

Bestimme etwa für Spieler 1 Zeilenminimum des Nutzens, d.h. den Nutzen, den Spieler 1 sicher hat, wenn er die der Zeile entsprechende Aktion wählt, hier also $(-6; -1; -6)^t$. Also entscheidet sich der Rationale/Paranoide für M, wenn er über die Minima maximiert. Für Spieler 2 erhält man $(-8; -4; -8)$. Dieses Vorgehen ist für Paranoiker/Pessimisten in Ordnung, aber wenn man anfängt zu überlegen, dass der andere Spieler genau so denkt, ..., also kein Nash-Gleichgewicht. Aber angenommen es gibt ein Nash-Gleichgewicht, dann wird dieses mit Maximinimierer erreicht, wie wir gleich sehen werden.

Definition 27 (Maximinimierer)**.** Sei $G = \langle\{1, 2\}, (A_i), (u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel. Eine Aktion $x^* \in A_1$ heißt **Maximinimierer (MM)** für Spieler 1 in G, falls

$$\min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) \geq \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \qquad \text{für alle } x \in A_1$$

und $y^* \in A_2$ heißt Maximinimierer für Spieler 2 in G falls

$$\min_{x \in A_1} u_2(x, y^*) \geq \min_{x \in A_1} u_2(x, y) \qquad \text{für alle } y \in A_2.$$

Bei unendlichen Spielen ersetze in der Definition Maximum durch Supremum und Minimum durch Infimum.

Bemerkung 28. Wenn ein Nash-Gleichgewicht in einem Nullsummenspiel existiert, so ist dies eine Kombination von Maximinimierern. (vgl. Satz 4 und Beweis dazu.)

Lemma 3. *Sei $G = \langle\{1, 2\}, (A_i), (u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann gilt*

$$\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y) = -\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$$

Beweis. Es gilt für beliebiges reellwertiges f

$$\min_z(-f(z)) \quad = \quad -\max_z(f(z)). \tag{2.1}$$

Damit gilt für alle $y \in A_2$

$$\begin{aligned} -\min_{x \in A_1} u_2(x, y) &\stackrel{2.1}{=} \max_{x \in A_1}(-u_2(x, y)) \\ &= \max_{x \in A_1}(u_1(x, y)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Schließlich erhält man

$$\begin{aligned}\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x,y) &\overset{2.1}{=} -\min_{y\in A_2} -[\min_{x\in A_1} u_2(x,y)] \\ &\overset{2.2}{=} -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y).\end{aligned}$$

□

Satz 4. *Sei $G = \langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann:*

1. *Falls (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist, dann sind x^* und y^* Maximinimierer für Spieler 1 bzw. Spieler 2.*
2. *Falls, (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht ist, dann gilt:*

$$\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) = u_1(x^*,y^*)$$

3. *Falls $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$ und x^* und y^* Maximinimierer von Spieler 1 bzw. Spieler 2 sind, dann ist (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. 1. Sei (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht. Nach der Definition von Nash-Gleichgewichten ist $u_2(x^*,y^*) \geq u_2(x^*,y)$ für alle $y \in A_2$. Wegen $u_1 = -u_2$ folgt $u_1(x^*,y^*) \leq u_1(x^*,y)$ für alle $y \in A_2$. Also

$$\begin{aligned}u_1(x^*,y^*) &= \min_{y\in A_2} u_1(x^*,y) \\ &\leq \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y) \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Außerdem gilt nach der Definition eines Nash-Gleichgewichtes aus der Perspektive von Spieler 1, dass $u_1(x^*,y^*) \geq u_1(x,y^*)$ für alle $x \in A_1$, also $u_1(x^*,y^*) \geq \min_{y\in A_2} u_1(x,y)$ für alle $x \in A_1$. Damit gilt auch $u_1(x^*,y^*) \geq \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y)$. Zusammen mit Ungleichung 2.3 folgt daraus

$$u_1(x^*,y^*) = \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y) \qquad (2.4)$$

Also ist x^* ein Maximinimierer.

Analog erhält man für Spieler 2, dass y^* ein Maximinimierer ist:

$$u_2(x^*,y^*) = \max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x,y) \qquad (2.5)$$

2. Aus Gleichung 2.5 folgt mit Lemma 3, dass $u_2(x^*,y^*) = -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y)$ und daraus wegen $u_1 = -u_2$, dass $u_1(x^*,y^*) = \min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y)$. Zusammen mit Gleichung 2.4 erhält man

$$u_1(x^*,y^*) = \min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y) = \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y).$$

Insbesondere folgt daraus, dass alle Nash-Gleichgewichte für alle Spieler denselben Nutzen haben.

3. Seien x^* und y^* Maximinimierer von Spieler 1 bzw. Spieler 2 und gelte $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) =: v^*$. Wegen Lemma 3 ist $-v^* = \max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x,y)$. Damit und da x^* und y^* Maximinimierer sind, gilt

$$u_1(x^*, y) \geq v^* \text{ für alle } y \in A_2 \text{ bzw.} \tag{2.6}$$

$$u_2(x, y^*) \geq -v^* \text{ für alle } x \in A_1 \tag{2.7}$$

   Insbesondere gilt für $x = x^*$ und $y = y^*$: $u_1(x^*, y^*) \geq v^*$ und $u_2(x^*, y^*) \geq -v^*$. Aus der letzten Ungleichung erhält man wegen $u_1 = -u_2$, dass $u_1(x^*, y^*) \leq v^*$, insgesamt also $u_1(x^*, y^*) = v^*$.

   Wegen Ungleichung 2.6 gilt $u_1(x^*, y) \geq u_1(x^*, y^*)$ für alle $y \in A_2$ bzw. wegen $u_1 = -u_2$ äquivalent $u_2(x^*, y) \leq u_2(x^*, y^*)$ für alle $y \in A_2$, d.h. y^* ist eine beste Antwort auf x^*.

   Analog erhält man wegen Ungleichung 2.7 $u_1(x, y^*) \leq u_1(x^*, y^*)$ für alle $x \in A_1$, d.h. auch x^* ist eine beste Antwort auf y^*. Damit ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.

Insgesamt folgt, dass man, wenn es mehrere Nash-Gleichgewichte gibt, sich immer ein beliebiges aussuchen kann, da alle den gleichen Nutzen liefern. □

Beachte, dass strikt kompetitive Spiele im Wesentlichen für Brettspiele interessant sind, jedoch nicht für die Wirtschaft.

3 Gemischte Strategien

3.1 Überblick

Im letzten Kapitel hat sich gezeigt, dass nicht in jedem Spiel ein Nash-Gleichgewicht existieren muss (vgl. etwa Matching-Pennies-Spiel). Was kann man in solchen Situationen tun? Idee: randomisierte Strategien.

Definition 29 (Gemischte Strategie)**.** Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ ein strategisches Spiel, so dass alle A_i höchstens abzählbar und alle u_i beschränkt sind.

Sei $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über der Menge A_i. Ein $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ ist eine **gemischte Strategie** in G, $\alpha_i(a_i)$ die Wahrscheinlichkeit für die Wahl von $a_i \in A_i$.

Ein Profil $(\alpha_i)_{i \in N} \in \prod_{i \in N} \Delta(A_i)$ induziert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $A = \prod_{i \in N} A_i$ durch

$$p(a) := \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i).$$

Für $A' \subseteq A$ sei

$$p(A') := \sum_{a \in A'} p(a) = \sum_{a \in A'} \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i).$$

Beispiel 30. Gemischte Strategie im Matching-Pennies-Spiel:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1, -1$	$-1, \ \ 1$
Zahl	$-1, \ \ 1$	$1, -1$

Für Spieler 1 betrachte die gemischte Strategie $\alpha_1 \in \Delta(\{K, Z\})$ mit

$$\alpha_1(K) = \frac{2}{3} \text{ und } \alpha_1(Z) = \frac{1}{3}.$$

Für Spieler 2 betrachte die gemischte Strategie $\alpha_2 \in \Delta(\{K, Z\})$ mit

$$\alpha_2(K) = \frac{1}{3} \text{ und } \alpha_2(Z) = \frac{2}{3}.$$

Die induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{ K, Z \}^2$ ist

$$
\begin{aligned}
p(K,K) &= \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(K) = \frac{2}{9} & u_1(K,K) &= +1 \\
p(K,Z) &= \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{4}{9} & u_1(K,Z) &= -1 \\
p(Z,K) &= \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(K) = \frac{1}{9} & u_1(Z,K) &= -1 \\
p(Z,Z) &= \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{2}{9} & u_1(Z,Z) &= +1.
\end{aligned}
$$

Definition 31 (Erwarteter Nutzen)**.** Sei $\alpha \in \prod_{i\in N} \Delta(A_i)$. Der **erwartete Nutzen** von α für Spieler i ist definiert als

$$U_i(\alpha) = U_i((\alpha_j)_{j\in N}) := \sum_{a\in A} \underbrace{\left(\prod_{j\in N} \alpha_j(a_j)\right)}_{=p(a)} u_i(a).$$

Beispiel 32. In Beispiel 30 sind der erwartete Nutzen für Spieler 1 und Spieler 2

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{9} \text{ und } U_2(\alpha_1, \alpha_2) = +\frac{1}{9}.$$

Definition 33 (Unterstützungsmenge)**.** Sei α_i eine gemischte Strategie. Die **Unterstützungsmenge** (**support**) von α_i ist die Menge

$$supp(\alpha_i) = \{ a_i \in A_i \mid \alpha_i(a_i) > 0 \}.$$

Definition 34 (Gemischte Erweiterung)**.** Die **gemischte Erweiterung** eines strategischen Spiels $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ist das Spiel $\langle N, (\Delta(A_i)), (U_i)\rangle$, in dem $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den Aktionen A_i ist und $U_i : \prod_{j\in N} \Delta(A_j) \to \mathbb{R}$ jedem $\alpha \in \prod_{j\in N} \Delta(A_j)$ den erwarteten Nutzen für Spieler i unter der von α induzierten Wahrscheinlichkeitsverteilung zuordnet.

Definition 35 (Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien)**.** Sei G ein strategisches Spiel. Ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien** von G ist ein Nash-Gleichgewicht der gemischten Erweiterung von G.

Satz 5 (Satz von Nash)**.** *Jedes endliche strategische Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.*

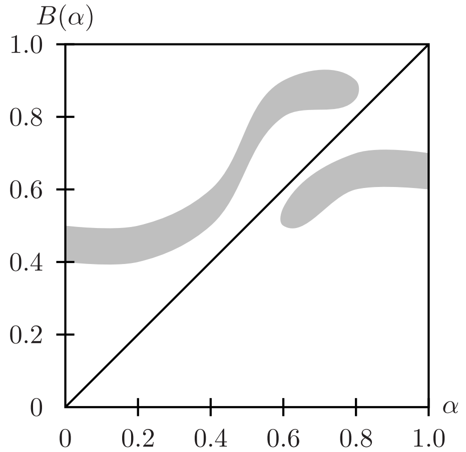
Beweisskizze. Betrachte die mengenwertige Funktion (Korrespondenz) der besten Antworten $B : \mathbb{R}^{\sum_i |A_i|} \to \text{Pot}(\mathbb{R}^{\sum_i |A_i|})$ mit

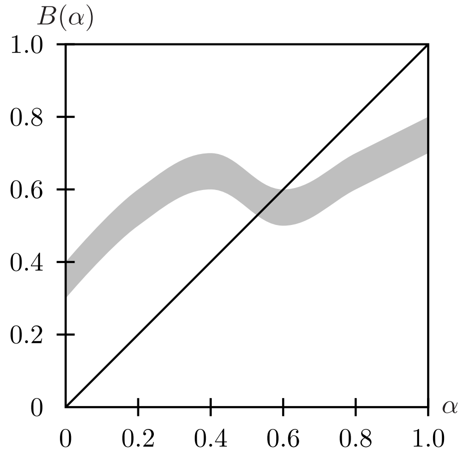
$$B(\alpha) = \prod_{i\in N} B_i(\alpha_{-i}).$$

Ein gemischtes Strategieprofil α ist Fixpunkt der Korrespondenz B gdw. $\alpha \in B(\alpha)$ gdw. α ein Nash-Gleichgewicht ist.

Der Graph der Korrespondenz sollte zusammenhängend sein. Dann liegen Punkte auf der Fixpunktdiagonalen. $\square$

In der ersten der beiden folgenden Abbildungen ist der Graph der Korrespondenz nicht zusammenhängend und es liegen keine Punkte auf der Fixpunktdiagonalen. Der zweite Graph ist dagegen zusammenhängend und die Korrespondenz besitzt Fixpunkte.





Definition 36. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn sie

1. beschränkt ist, d.h. es in jeder Dimension obere und untere Schranken gibt und
2. abgeschlossen ist, d.h. wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Elementen aus X selbst in X liegt.

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in X$ und beliebiges $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X.$$

Eine Korrespondenz $f : X \to \mathrm{Pot}(X)$ heißt **ober-hemi-stetig**, falls ihr Graph

$$\mathrm{Graph}(f) = \{\, (x, y) \mid x \in X,\ y \in f(x) \,\}$$

eine abgeschlossene Menge ist.

Satz 6 (Fixpunktsatz von Kakutani)**.** *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, kompakte und konvexe Menge und sei außerdem $f : X \to \mathrm{Pot}(X)$ eine ober-hemi-stetige Korrespondenz, so dass für jedes $x \in X$ die Menge $f(x) \subseteq X$ nicht-leer und konvex ist. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in X$ mit $x \in f(x)$.*

Beweis. vgl. z. B. [Heu04, Abschnitt 232]. □

Beweis des Satzes von Nash. Zeige, dass der Fixpunktsatz von Kakutani mit $\prod_i \Delta(A_i)$ für X und B für f anwendbar ist.

1. $\prod_i \Delta(A_i)$ ist nicht-leer, konvex und kompakt: Ein Profil von gemischten Strategien zu G ist durch $M := \sum_{i \in N} |A_i|$ nicht-negative reelle Zahlen gegeben, so dass sich die Zahlen, die den Aktionen eines Spielers entsprechen, zu 1 addieren.

   Wir interpretieren die Menge der gemischten Strategieprofile für G, symbolisch $\mathcal{A} := \prod_{i \in N} \Delta(A_i)$, als Teilmenge des $\mathbb{R}^M$. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ nicht-leer, kompakt und konvex ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Spieler mit natürlichen Zahlen bezeichnet, d. h. $N = \{1, \ldots, n\}$.

$\mathcal{A}$ ist nicht-leer, da $\mathcal{A}$ z. B. das Tupel $(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{|A_1|-1 \text{ mal}}, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{|A_n|-1 \text{ mal}})$ enthält.

$\mathcal{A}$ ist beschränkt, da keines der Elemente negativ oder größer als 1 sein kann. $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen, denn wenn in einer konvergenten Folge von Elementen von $\mathcal{A}$ alle Elemente der Folge nicht-negativ und durch 1 beschränkt sind und sich die zu einem Spieler gehörenden Wahrscheinlichkeiten zu 1 addieren, dann muss dies auch für den Grenzwert gelten. Ansonsten enthält man unmittelbar einen Widerspruch dazu, dass Grenzwerte Häufungspunkte sein müssen. Da $\mathcal{A}$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist $\mathcal{A}$ kompakt.

Seien schließlich $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ und $t \in [0, 1]$. Betrachte $\gamma = t\alpha + (1-t)\beta$. Es gilt: $\min \gamma = \min(t\alpha + (1-t)\beta) \geq t \min \alpha + (1-t) \min \beta \geq t \cdot 0 + (1-t) \cdot 0 = 0$, und analog $\max \gamma \leq 1$.

Seien $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ und $\tilde{\gamma}$ die Abschnitte von α, β und γ, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Spieler i bestimmen. Dann gilt $\sum \tilde{\gamma} = \sum(t\tilde{\alpha} + (1-t)\tilde{\beta}) = t \sum \tilde{\alpha} + (1-t) \sum \tilde{\beta} = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$. Also summieren sich die zusammengehörigen Wahrscheinlichkeiten in γ zu 1. Zusammen folgt $\gamma \in \mathcal{A}$, also ist $\mathcal{A}$ auch konvex.

2. $B(\alpha)$ ist nicht-leer: U_i ist für festes α_{-i} linear in der gemischten Strategie von Spieler i, d.h. für $\beta_i, \gamma_i \in \Delta(A_i)$ gilt

$$U_i(\alpha_{-i}, \lambda\beta_i + (1-\lambda)\gamma_i) = \lambda U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) + (1-\lambda) U_i(\alpha_{-i}, \gamma_i) \qquad \text{für } \lambda \in [0, 1] \quad (3.1)$$

Eine mögliche Interpretation der Linearität ist es, dass man eine Metamischung spielt, d.h. mit Wahrscheinlichkeit λ spielt man β_i und mit Wahrscheinlichkeit $(1-\lambda)$ spielt man γ_i.

Daraus folgt, dass U_i stetig auf $\Delta(A_i)$ ist. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen haben ihr Maximum in der Menge. Also ist jedes $B_i(\alpha_{-i})$ und damit auch $B(\alpha)$ eine nicht-leere Menge.

3. $B(\alpha)$ ist konvex, da $B_i(\alpha_{-i})$ konvex ist: seien $\alpha_i', \alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i})$, d.h.

$$U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i') = U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i'').$$

Wegen Gleichung 3.1 gilt dann auch

$$\lambda\alpha_i' + (1-\lambda)\alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i}).$$

4. Es ist noch zu zeigen, dass B ober-hemi-stetig ist. Sei (α^n, β^n) eine Folge in Graph(B) mit $\lim_{n\to\infty}(\alpha^n, \beta^n) = (\alpha, \beta)$; $\alpha^n, \beta^n, \alpha, \beta \in \prod_i \Delta(A_i)$ und $\beta^n \in B(\alpha^n)$. Zeige, dass dann $(\alpha, \beta) \in$ Graph(B):

Es gilt für alle $i \in N$:

$$\begin{aligned}
U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) &\overset{\text{Def. } \alpha,\ \beta}{=} U_i(\lim_{n\to\infty}(\alpha^n_{-i}, \beta^n_i)) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{n\to\infty} U_i(\alpha^n_{-i}, \beta^n_i) \\
&\overset{\beta^n_i \text{ beste Antwort auf } \alpha^n_{-i}}{\geq} \lim_{n\to\infty} U_i(\alpha^n_{-i}, \beta'_i) \qquad \text{für alle } \beta'_i \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} U_i(\lim_{n\to\infty} \alpha^n_{-i}, \beta'_i) \qquad \text{für alle } \beta'_i \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Def. } \alpha_i}{=} U_i(\alpha_{-i}, \beta'_i) \qquad \text{für alle } \beta'_i \in \Delta(A_i)
\end{aligned}$$

Also ist β_i eine beste Antwort auf α_{-i} für alle $i \in N$, damit $\beta \in B(\alpha)$ und schließlich $(\alpha, \beta) \in \text{Graph}(B)$.

□

Lemma 7. *Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ein endliches strategisches Spiel. Dann ist $\alpha^* \in \prod_i \Delta(A_i)$ ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien gdw. für jeden Spieler $i \in N$ jede reine Strategie aus der Unterstützungsmenge von α^*_i eine beste Antwort auf α^*_{-i} ist.*

Für den einzelnen Spieler ist es also – wenn die anderen Spieler ihre gemischten Strategien beibehalten – egal, ob er seine gemischte Strategie oder eine Einzelaktion daraus spielt.

Beweis. Sei zunächst α^* ein Nash-Gleichgewicht mit $a_i \in supp(\alpha^*_i)$. Angenommen, a_i ist keine beste Antwort auf α^*_{-i}. Wegen der Linearität von U_i kann Spieler i seine Auszahlung verbessern, indem er Gewicht von a_i auf andere Aktionen in $supp(\alpha^*_i)$ verteilt. Also war α^*_i keine beste Antwort und somit im Widerspruch zur Voraussetzung α^* kein Nash-Gleichgewicht.

Für die andere Richtung der Äquivalenz nehmen wir an, dass α^* kein Nash-Gleichgewicht ist. Dann muss es ein $i \in N$ und eine Strategie α'_i mit der Eigenschaft geben, dass $U_i(\alpha^*_{-i}, \alpha'_i) > U_i(\alpha^*_{-i}, \alpha^*_i)$. Wegen der Linearität von U_i muss es eine Aktion $a'_i \in supp(\alpha'_i)$ geben, die höheren Nutzen als eine Aktion $a''_i \in supp(\alpha^*_i)$ bringt; $supp(\alpha^*_i)$ besteht also nicht nur aus besten Antworten auf α^*_{-i}. □

Bemerkung 37. Ist $G = \langle\{1, 2\}, (A_i), (u_i)\rangle$ mit $A_1 = \{T, B\}$ und $A_2 = \{L, R\}$ ein Zwei-Spieler-Spiel mit je zwei möglichen Aktionen und ist (α^*_1, α^*_2) mit $\alpha^*_1(T) = 1$ und $0 < \alpha^*_2(L) < 1$ ein Nash-Gleichgewicht in G, so ist auch mindestens eines der Profile (T, L) und (T, R) ein Nash-Gleichgewicht in G.

Nach Voraussetzung sind sowohl L als auch R beste Antworten auf T. Angenommen, T wäre weder auf L noch auf R eine beste Antwort. Dann wäre B sowohl auf L als auch auf R eine bessere Antwort als T. Wegen der Linearität des erwarteten Nutzens wäre B auch eine bessere Antwort als T auf α^*_2, im Widerspruch zu der Annahme, dass (α^*_1, α^*_2) ein Nash-Gleichgewicht in G ist.

Betrachte zum Beispiel das Nash-Gleichgewicht $(\{T \mapsto 1, B \mapsto 0\}, \{L \mapsto \frac{1}{10}, R \mapsto \frac{9}{10}\})$ in dem Spiel

	L	R
T	1, 1	1, 1
B	2, 2	−5, −5

Hier ist auch (T, R) ein (reines) Nash-Gleichgewicht.

Beispiel 38. Gemischte Nash-Gleichgewichte bei Bach oder Strawinsky:

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	$2,1$	$0,0$
	S	$0,0$	$1,2$

Allgemein: vier mögliche Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.

Die möglichen echt gemischten Strategieprofile sind

$$\{B\} \text{ vs. } \{B,S\}, \qquad \{S\} \text{ vs. } \{B,S\}, \qquad \{B,S\} \text{ vs. } \{B\},$$
$$\{B,S\} \text{ vs. } \{S\} \qquad \text{und} \qquad \{B,S\} \text{ vs. } \{B,S\}$$

Bei „Bach oder Strawinsky“ gibt es zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, nämlich (B, B) und (S, S). Wie sieht aber ein echt gemischtes Nash-Gleichgewicht für „Bach oder Strawinsky“ aus? Betrachte hier nur Nash-Gleichgewichte mit $\{B, S\}$ vs. $\{B, S\}$.

Angenommen, (α_1, α_2) ist das gemischte Nash-Gleichgewicht mit $0 < \alpha_1(B) < 1$ und $0 < \alpha_2(B) < 1$. Dann muss wegen Lemma 7 gelten, dass

$$U_1((1,0),(\alpha_2(B),\alpha_2(S))) = U_1((0,1),(\alpha_2(B),\alpha_2(S))).$$

Die linke Seite dieser Gleichung entspricht dem Fall, dass Spieler 1 das Bach-Konzert besucht und hat den Wert $2\cdot\alpha_2(B)+0\cdot\alpha_2(S)$. Die rechte Seite entspricht der Aktion, das Strawinsky-Konzert zu besuchen und hat den Wert $0 \cdot \alpha_2(B) + 1 \cdot \alpha_2(S) = 1 \cdot (1 - \alpha_2(B))$. Gleichsetzen der Werte ergibt $2 \cdot \alpha_2(B) = 1 - \alpha_2(B)$. Daraus folgt, dass $\alpha_2(B) = \frac{1}{3}$ und $\alpha_2(S) = \frac{2}{3}$.

Analog erhält man für Spieler 1, dass $\alpha_1(B) = \frac{2}{3}$ und $\alpha_1(S) = \frac{1}{3}$. Das Nutzenprofil dieses Gleichgewichts ist $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

3.2 Evolutionäre Gleichgewichte

Idee: die Spieler sind biologische Organismen, die derselben Art angehören und denen verschiedene Strategien zur Verfügung stehen. Die Aktionsauswahl wird durch die „Natur“

(Vererbung, Mutation) getroffen. Der Nutzen entspricht den Überlebenschancen eines Individuums.

Es soll die Frage beantwortet werden, ob es Strategien gibt, die in dem Sinne „evolutionär stabil“ sind, dass sie ein stabiles Gleichgewicht in der Population herstellen, in dem Mutationen „unattraktiv“ sind.

Bei der spieltheoretischen Modellierung betrachten wir nur Zwei-Personenspiele, die für die „Begegnung“ zweier Individuen stehen, d.h. $N = \{1, 2\}$. Die Tatsache, dass die Individuen derselben Art angehören, wird dadurch modelliert, dass $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ (schreibe deshalb kurz $u := u_1$). Gemischte Strategien entsprechen gemischten Populationen.

Eine Strategie $b^* \in B$ ist evolutionär stabil, wenn sie gegen Mutationen resistent ist. Wenn ein kleiner Anteil $\varepsilon > 0$ an Individuen mutiert, d.h. $b \in B \setminus \{b^*\}$ wählt, soll sich trotzdem b^* durchsetzen:

$$\overbrace{\underbrace{(1-\varepsilon)u(b,b^*)}_{\text{M vs. R}} + \underbrace{\varepsilon u(b,b)}_{\text{M vs. M}}}^{U_M \text{ Mutant}} < \overbrace{\underbrace{(1-\varepsilon)u(b^*,b^*)}_{\text{R vs. R}} + \underbrace{\varepsilon u(b^*,b)}_{\text{R vs. M}}}^{U_R \text{ Rein}}.$$

Für kleines ε ist das äquivalent zu

$$u(b, b^*) < u(b^*, b^*) \quad \text{oder} \quad [u(b, b^*) = u(b^*, b^*) \text{ und } u(b, b) < u(b^*, b)]$$

Definition 39 (Symmetrisches strategisches Spiel)**.** Ein strategisches Spiel mit zwei Spielern $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt **symmetrisch**, falls $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ für alle $a, b \in A_1$ gilt. $B := A_1 (= A_2)$ heißt Aktionsmenge von G, $u := u_1$ heißt Nutzen- oder Auszahlungsfunktion von G.

Definition 40 (Evolutionär stabile Strategie)**.** Sei G ein symmetrisches strategisches Spiel mit Aktionsmenge B und Nutzenfunktion u. Eine Strategie $b^* \in B$ heißt **evolutionär stabil**, falls

- (b^*, b^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist und
- für alle besten Antworten $b \in B$ auf b^* mit $b \neq b^*$ gilt $u(b, b) < u(b^*, b)$.

Beispiel 41. Falke-oder-Taube-Spiel mit reellem Parameter $c > 0$ für Verlust bei einem Kampf.

	T	F
T	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$0, 1$
F	$1, 0$	$\frac{1}{2}(1-c), \frac{1}{2}(1-c)$

Hat dieses Spiel evolutionär stabile Strategien? Bestimme dazu in einem ersten Schritt alle symmetrischen Nash-Gleichgewichte (b^*, b^*) und untersuche diese in einem zweiten Schritt darauf, ob sie die „Mutanten-Eigenschaft“ erfüllen, d.h. ob für alle abweichenden besten Antworten b gilt, dass $u(b, b) < u(b^*, b)$.

Zur Bestimmung der symmetrischen Nash-Gleichgewichte:

1. reine gegen reine Strategie: (T, T) ist kein Nash-Gleichgewicht, (T, F) und (F, T) sind genau dann Nash-Gleichgewichte, wenn $c \geq 1$, hier aber uninteressant, weil sie nicht symmetrisch sind, und (F, F) ist ein Nash-Gleichgewicht genau dann, wenn $c \leq 1$. F ist also unser erster Kandidat für eine evolutionär stabile Strategie.

2. reine gegen gemischte Strategie: uninteressant, da ein solches Nash-Gleichgewicht nicht symmetrisch wäre.

3. gemischte gegen gemischte Strategie: sei $\alpha^* = (b^*, b^*)$ mit $b^* = \{ T \mapsto p, F \mapsto 1 - p \}$, wobei $0 < p < 1$. Es muss gelten, dass $u(T, b^*) = u(F, b^*)$, d.h. $p \cdot \frac{1}{2} + (1 - p) \cdot 0 = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot \frac{1}{2}(1 - c)$. Vereinfacht man diese Gleichung, so erhält man zunächst $\frac{1}{2}p = p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}pc$. Dies lässt sich zu $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}pc$ vereinfachen. Löst man diese Gleichung nach p auf, erhält man $p = \frac{2}{c}(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{c}$. Wegen $0 < p < 1$ muss $c > 1$ sein. Damit ist α^* für $c > 1$ ein Nash-Gleichgewicht und somit unser zweiter Kandidat für eine evolutionär stabile Strategie.

Untersuche nun die beiden oben ermittelten Kandidaten, ob sie die „Mutanten-Eigenschaft“ erfüllen. Betrachte also alle anderen besten Antworten auf b^*.

1. Kandidat 1: $b^* = F$ für $c \leq 1$. Falls $c < 1$, ist F strikt dominant, d.h. es keine weiteren besten Antworten auf F. Damit ist F evolutionär stabil. Falls $c = 1$, ist auch jede gemischte Strategie $b = \{ T \mapsto q, F \mapsto 1 - q \}$ mit $0 < q \leq 1$ eine (abweichende) beste Antwort auf b^*. Da aber $u(b, b) = \frac{1}{2}q^2 + 1 \cdot (1 - q) \cdot q = \frac{1}{2}q^2 + q - q^2 = q - \frac{1}{2}q^2 < q = u(b^*, b)$, ist F für $c \leq 1$ evolutionär stabil.

2. Kandidat 2: $b^* = \{ T \mapsto p, F \mapsto 1 - p \}$ für $c > 1$. Alle $b \in \Delta(\{ T, F \})$ mit $b = \{ T \mapsto q, F \mapsto 1 - q \}$, $0 \leq q \leq 1$, sind beste Antworten auf b^*. Betrachte zunächst nur reine beste Antworten: mit $b = T$ ist $u(b^*, b) = (1 - \frac{1}{c}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \cdot 1 > \frac{1}{2} = u(b, b)$, mit $b = F$ ist $u(b^*, b) = (1 - \frac{1}{c}) \cdot 0 + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2}(1 - c) > \frac{1}{2}(1 - c) = u(b, b)$. Die Bedingung $u(b, b) < u(b^*, b)$ ist wegen $|\{ T, F \}| = 2$ auch für alle anderen $b \in \Delta(\{ T, F \})$ erfüllt. Damit ist b^* für $c > 1$ evolutionär stabil.

Aus der Definition von evolutionär stabilen Strategien folgt, dass symmetrische Nash-Gleichgewichte (b^*, b^*), für die es keine andere beste Antwort gibt, evolutionär stabile Strategien sein müssen. Nicht-strikte NGs müssen nicht unbedingt evolutionär stabile Strategien sein.

Beispiel 42. Betrachte das Spiel

	1	2	3
1	γ, γ	$1, -1$	$-1, 1$
2	$-1, 1$	γ, γ	$1, -1$
3	$1, -1$	$-1, 1$	γ, γ

mit reellem Parameter $0 < \gamma < 1$. Das Profil (α, α) mit $\alpha = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ist ein gemischtes Nash-Gleichgewicht. Die Auszahlung für beide Spieler beträgt $\frac{\gamma}{3}$. α ist aber keine evolutionär stabile Strategie, denn ein Mutant könnte die reine Strategie $\alpha' = (1, 0, 0)$ – oder eine beliebige andere reine Strategie – spielen. Gegen α-Spieler erhielte er damit Auszahlung $\frac{\gamma}{3}$, gegen andere Mutanten, die auch α' spielen, aber Auszahlung $\gamma > \frac{\gamma}{3}$. Das heißt, α_i ist keine evolutionär stabile Strategie. Beachte, dass α' *kein* neues Nash-Gleichgewicht (α', α') induziert.

4 Algorithmen und Komplexität

In diesem Kapitel werden Algorithmen zur Bestimmung von Nash-Gleichgewichten vorgestellt und auf ihre Komplexität untersucht. Die zentralen Aussagen werden sein, dass in Nullsummenspielen das Finden eines Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien nur polynomielle Zeit benötigt, da man dieses Problem auf das Lösen eines Linearen Programmes zurückführen kann, dass für allgemeine Zwei-Personen-Matrixspiele das Finden eines gemischten Nash-Gleichgewichts ein Problem ist, dessen Komplexität noch unbekannt ist, und dass das Finden eines gemischten Nash-Gleichgewichts mit einem bestimmten Wert (im Sinne von Summe der Auszahlungen oder von Auszahlung für einen der Spieler) **NP**-vollständig ist.

4.1 Nullsummenspiele

Nach dem Satz von Nash existieren Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien. Nach dem Maximin-Satz ist jedes Nash-Gleichgewicht ein Paar von Maximinimierern. Da mindestens ein Nash-Gleichgewicht existiert und damit alle Paare von Maximinimierern Nash-Gleichgewichte sind und zu den gleichen Auszahlungen führen, genügt es, solche Paare zu berechnen.

Laufe dazu über alle gemischten Strategien α von Spieler 1 und bestimme jeweils eine für Spieler 1 schlechteste Antwort β_α von Spieler 2. Bestimme dann einen Maximinimierer α so, dass $U_1(\alpha, \beta_\alpha)$ maximal wird. Wegen des Support-Lemmas (Lemma 7) reicht es aus, anstelle aller möglichen Strategien β_α nur die reinen Antworten von Spieler 2 zu betrachten.

4.1.1 Exkurs Lineare Programmierung/Lineare Optimierung

Der Ausdruck „Lineare Programmierung“ wurde in den 1930er Jahren geprägt – bevor Computer programmiert wurden. Damals bedeutete „Programmierung“ noch Planung (vgl. auch Ausdruck „dynamische Programmierung“).

Worum es geht: Lösung eines Systems linearer Ungleichungen über n reellwertigen Variablen unter Berücksichtigung einer linearen Zielfunktion, die man maximieren (oder minimieren) möchte.

Beispiel 43 (Sortimentproblem)**.** Es werden zwei Sortimente produziert, die beide ganz verkauft werden können.

Sortiment 1: 25 Minuten Schneiden, 60 Minuten Zusammenbau, 68 Minuten Nachbearbeitung. 30 Euro Gewinn pro Artikel.

Sortiment 2: 75 Minuten Schneiden, 60 Minuten Zusammenbau, 34 Minuten Nachbearbeitung. 40 Euro Gewinn pro Artikel.

Pro Tag stehen zur Verfügung: 450 Minuten zum Zuschneiden, 480 Minuten zum Zusammenbau, 476 Minuten für die Nachbearbeitung.

Wie viele Artikel der beiden Sortimente stellt man her, wenn man den Gewinn maximieren will? Sei zur Beantwortung dieser Frage x die Anzahl der produzierten Artikel in Sortiment 1, y die Anzahl der produzierten Artikel in Sortiment 2.

Die oben genannten Einschränkungen und das Ziel der Gewinnmaximierung lassen sich wie folgt formalisieren:

$$x \geq 0, y \geq 0 \tag{4.1}$$

$$25x + 75y \leq 450 \text{ (oder äquiv. } y \leq \frac{450}{75} - \frac{25x}{75} = 6 - \frac{1}{3}x) \tag{4.2}$$

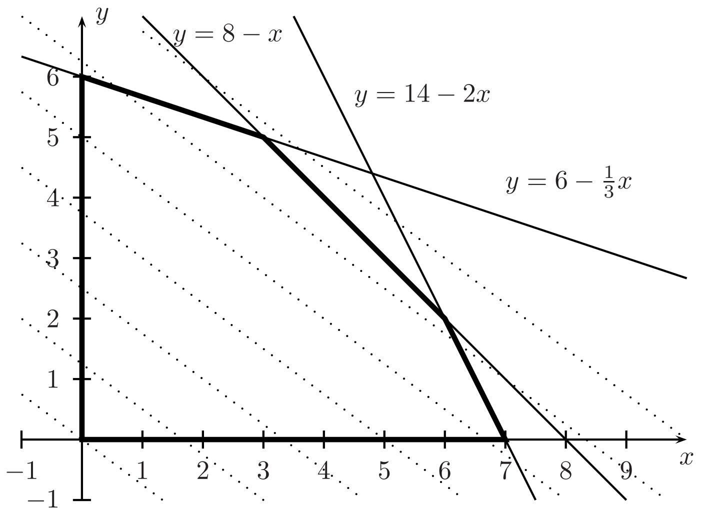
$$60x + 60y \leq 480 \text{ (oder äquiv. } y \leq 8 - x) \tag{4.3}$$

$$68x + 34y \leq 476 \text{ (oder äquiv. } y \leq 14 - 2x) \tag{4.4}$$

$$\text{Maximiere } z = 30x + 40y \tag{4.5}$$

Die Ungleichungen (4.1)-(4.4) beschreiben zulässige Lösungen. Zeile (4.5) ist die *Zielfunktion* (objective function). Die Ungleichungen (4.1)-(4.4) beschreiben eine *konvexe* Menge in $\mathbb{R}^2$.

In der folgenden Abbildung sind die zulässigen Lösungen genau die Punkte in der von den drei Geraden und den Koordinatenachsen eingeschlossenen konvexen Menge. Auf den gepunkteten Linien ist der Nutzen z konstant, von unten nach oben handelt es sich um die Isolinien für $z = 0, 50, 100, \ldots, 300$. Der Nutzen wird also in dem Schnittpunkt der Geraden $y = 6 - \frac{1}{3}x$ und $y = 8 - x$, d.h. in $(x, y) = (3, 5)$, maximiert, der maximale Nutzen beträgt 290.



Definition 44 (Lineares Programm in Standardform)**.** Ein **Lineares Programm in Standardform** besteht aus n reellwertigen Variablen x_i, n Koeffizienten b_i, m Konstanten c_j, $m \cdot n$ Koeffizienten a_{ji}, m Ungleichungen der Form

$$c_j \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$$

sowie der (zu minimierenden) **Zielfunktion**

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \text{ (für } x_i \geq 0).$$

Will man die Zielfunktion nicht minimieren, sondern maximieren, so genügt es, die Vorzeichen der Koeffizienten b_i umzukehren. Anstelle von Ungleichungen kann man auch Gleichungen wählen, da

$$x + y \leq c \text{ gdw. } x + y + z = c \text{ für ein } z \geq 0.$$

Ein solches z heißt **Slack-Variable**.

Die **Simplex-Methode** ist das Standardverfahren, um lineare Programme zu lösen, d.h. um zulässige Lösungen zu finden, die die Zielfunktion minimieren bzw. maximieren. Diese Methode hat im schlechtesten Fall exponentielle Laufzeit, ist aber in allen praktischen Fällen „gutmütig". Daneben gibt es auch ein Polynomialzeit-Lösungsverfahren, das jedoch in der Praxis kaum zum Einsatz kommt.

4.1.2 Anwendung auf Nullsummenspiele

Seien $A_1 = \{ a_1, \ldots, a_m \}$ und $A_2 = \{ b_1, \ldots, b_n \}$.

Spieler 1 sucht eine gemischte Strategie α_1. Bestimme für jedes α_1 von Spieler 1 den Nutzen bei der schlimmsten Antwort des Gegners, dann maximiere darüber. Das entsprechende lineare Programm ist

$$\begin{aligned} \alpha_1(a_i) &\geq 0 \quad && \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \} \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(a_i) &= 1 && \\ U_1(\alpha_1, b_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(a_i) \cdot u_1(a_i, b_j) &\geq u \quad && \text{für alle } j \in \{ 1, \ldots, n \} \\ \text{Maximiere } u. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Programms ist ein Maximinimierer für Spieler 1. Die Lösung eines analogen Programmes führt zu einem Maximinimierer für Spieler 2.

Da bei Nullsummenspielen, die ein Nash-Gleichgewicht besitzen, Maximinimierung und Minimaximierung das gleiche Ergebnis liefern, kann man auch das lineare Programm mit den Ungleichungen

$$U_1(a_i, \alpha_2) \leq u \qquad \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \}$$

aufstellen und u minimieren. Für α_2 entsprechend.

4.2 Finden von Nash-Gleichgewichten bei allgemeinen Zwei-Personen-Matrixspielen

Für allgemeine Spiele funktioniert die LP-Methode nicht. Benutze stattdessen Instanzen des **Linear Complementarity Problem** (LCP), bei dem zu den linearen (Un-)Gleichungen ein weiterer Typ von Bedingungen hinzukommt: mit zwei Gruppen von Variablen $X = \{ x_1, \ldots, x_k \}$ und $Y = \{ y_1, \ldots, y_k \}$ können für $i \in \{ 1, \ldots, k \}$ Bedingungen der Form $x_i \cdot y_i = 0$ (oder äquivalent $x_i = 0 \vee y_i = 0$) formuliert werden. Im Gegensatz zu linearen Programmen gibt es keine Optimierungsbedingung.

Damit sind Nash-Gleichgewichte für beliebige Zwei-Personen-Matrixspiele beschreibbar. Sei (α, β) ein Nash-Gleichgewicht mit Nutzenprofil (u, v) in dem Spiel $\langle \{ 1, 2 \}, (A_1, A_2), (u_1, u_2) \rangle$ mit $A_1 = \{ a_1, \ldots, a_m \}$ und $A_2 = \{ b_1, \ldots, b_n \}$. Dann muss gelten:

$$u - U_1(a_i, \beta) \geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \} \tag{4.6}$$

$$v - U_2(\alpha, b_j) \geq 0 \quad \text{für alle } j \in \{ 1, \ldots, n \} \tag{4.7}$$

$$\alpha(a_i) \cdot (u - U_1(a_i, \beta)) = 0 \quad \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \} \tag{4.8}$$

$$\beta(b_j) \cdot (v - U_2(\alpha, b_j)) = 0 \quad \text{für alle } j \in \{ 1, \ldots, n \} \tag{4.9}$$

$$\alpha(a_i) \geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \}, \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha(a_i) = 1 \tag{4.10}$$

$$\beta(b_j) \geq 0 \quad \text{für alle } j \in \{ 1, \ldots, n \}, \qquad \sum_{j=1}^{n} \beta(b_j) = 1 \tag{4.11}$$

Beachte in den Gleichungen (4.8) und (4.9), dass etwa $\alpha(a_i) \cdot (u - U_1(a_i, \beta)) = 0$ genau dann, wenn $\alpha(a_i) = 0$ oder $u - U_1(a_i, \beta) = 0$. Einer der beiden Faktoren muss aber immer verschwinden, da

1. $\alpha(a_i) = 0$ gilt, falls a_i nicht im Support der Gleichgewichtsstrategie liegt
2. $u - U_1(a_i, \beta) = 0$ gilt, falls a_i im Support der Gleichgewichtsstrategie liegt, weil dann a_i eine beste Antwort auf β ist (vgl. auch Bedingung (4.6)).

Die obige LCP-Formulierung kann mit zusätzlichen Variablen in LCP-Normalform umgeformt werden.

Satz 8. *Ein Strategieprofil (α, β) in gemischten Strategien mit Auszahlungsprofil (u, v) ist ein Nash-Gleichgewicht gdw. es eine Lösung des LCPs (4.6)-(4.11) über (α, β) und (u, v) ist.*

Beweis. Dass jedes Nash-Gleichgewicht eine Lösung des LCPs ist, ist wegen des Support-Lemmas (Lemma 7) klar. Sei also (α, β, u, v) eine Lösung des LCPs. Wegen der Bedingungen (4.10) und (4.11) sind α und β gemischte Strategien. Wegen (4.6) ist u mindestens so groß wie die maximale Auszahlung über alle möglichen reinen Antworten, wegen (4.8) ist u genau das Maximum der Auszahlungen. Wird die reine Strategie a_i mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt, dann hat die Auszahlung für Spieler i als Reaktion auf die Strategie β wegen (4.8) den Wert u. Mit der Linearität des erwarteten Nutzens folgt, dass α eine beste Antwort auf β ist. Analog zeigt man, dass auch β eine beste Antwort auf α und somit (α, β) ein Nash-Gleichgewicht mit Auszahlung (u, v) ist. □

4.2.1 Lösungsalgorithmus für LCPs

Wie löst man ein LCP? Eine Möglichkeit ist der folgende naive Algorithmus.

1. Zähle alle $(2^n - 1) \cdot (2^m - 1)$ möglichen Paare von Supportmengen auf. Für jedes solche Paar $(\mathit{supp}(\alpha), \mathit{supp}(\beta))$:
2. Konvertiere das LCP in ein lineares Programm. Dabei sind (4.6), (4.7), (4.10) und (4.11) bereits lineare Ungleichungen, Bedingungen der Form $\alpha(a_i) \cdot (u - U_1(a_i, \beta)) = 0$ werden durch eine neue lineare Gleichung ersetzt, nämlich
   - $u - U_1(a_i, \beta) = 0$, falls $a_i \in \mathit{supp}(\alpha)$ und
   - $\alpha(a_i) = 0$, sonst,

   entsprechend für Bedingungen der Form $\beta(b_j) \cdot (v - U_2(\alpha, b_j)) = 0$. Da die Kriterien, die optimiert werden sollen, bereits in den Constraints stehen, benötigen wir eine beliebige, von den Constraints unabhängige Optimierungsfunktion, etwa die konstante Nullfunktion.
3. Wende einen Lösungsalgorithmus für lineare Programme, zum Beispiel den Simplex-Algorithmus, auf das transformierte Programm an.

Die Laufzeit des naiven Algorithmus beträgt $\mathcal{O}(p(n+m) \cdot 2^{n+m})$, wobei p ein geeignetes Polynom ist. In der Praxis besser geeignet ist der Lemke-Howson-Algorithmus. Die Frage, ob LcpSolve in **P** liegt, ist offen, aber es liegt auf jeden Fall in **NP**, da man den naiven Algorithmus auch als nichtdeterministischen Polynomialzeitalgorithmus betrachten kann, bei dem im ersten Schritt ein Paar aus $\mathit{supp}(\alpha)$ und $\mathit{supp}(\beta)$ „geraten“, im zweiten Schritt wie oben vorgegangen und im dritten Schritt ein Polynomialzeitalgorithmus für die Lösung linearer Programme angewandt wird.

4.3 Komplexität der Nash-Gleichgewichts-Bestimmung in allgemeinen Zwei-Personen-Spielen

Definition 45 (Notationen der Aussagenlogik)**.** Sei φ eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform (KNF). Wir schreiben $V(\varphi)$ für die Menge der Variablen in φ, $L(\varphi)$ für die Menge der Literale über $V(\varphi)$, d.h. $L(\varphi) = V(\varphi) \cup \{ \neg v \mid v \in V(\varphi) \}$. Dabei unterscheiden wir für $v \in V(\varphi)$ die Variable v von dem positiven Literal v. Ist $\ell \in L(\varphi)$, so ist $\bar{\ell}$ das zu ℓ komplementäre Literal, d.h. $\bar{\ell} = \neg v$, falls $\ell = v$, und $\bar{\ell} = v$, falls $\ell = \neg v$. $v(\ell)$ ist die zum Literal $\ell \in L(\varphi)$ gehörende Variable, $C(\varphi)$ die Menge der Klauseln in φ.

Sei $\Theta : V(\varphi) \to \{ T, F \}$ eine Variablenbelegung. Wir schreiben $L(\Theta)$ für die Menge der Literale, die von Θ erfüllt werden, formal $L(\Theta) = \{ \ell \in L(\varphi) \mid \Theta \models \ell \}$.

Definition 46 (Induziertes Spiel)**.** Sei φ eine KNF-Formel und $n := |V(\varphi)|$. Das **von φ induzierte Spiel** $G(\varphi)$ ist das symmetrische Zwei-Personen-Spiel mit der Aktionenmenge $L(\varphi) \cup V(\varphi) \cup C(\varphi) \cup \{ \square \}$ und der Nutzenfunktion u, die definiert ist durch

u	$\ell' \in L(\varphi)$	$v' \in V(\varphi)$	$c' \in C(\varphi)$	$\square$
$\ell \in L(\varphi)$	1, falls $\ell \neq \bar{\ell}'$ -2, falls $\ell = \bar{\ell}'$	-2	-2	-2
$v \in V(\varphi)$	2, falls $v \neq v(\ell')$ $2-n$, falls $v = v(\ell')$	-2	-2	-2
$c \in C(\varphi)$	2, falls $\ell' \notin c$ $2-n$, falls $\ell' \in c$	-2	-2	-2
$\square$	1	1	1	0

Definition 47. Sei Θ eine Variablenbelegung zu φ. Die **von Θ induzierte Strategie** α^Θ ist definiert durch

$$\alpha^\Theta(a) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } a \in L(\Theta) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 9 (Satz von Conitzer und Sandholm)**.** *Sei φ eine KNF-Formel. Dann hat $G(\varphi)$ genau die folgenden Nash-Gleichgewichte:*

1. *das reine Profil $(\Box, \Box)$ mit Nutzenprofil $(0, 0)$ und*
2. *für jede erfüllende Belegung Θ von φ das Profil $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ mit Nutzenprofil $(1, 1)$.*

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass alle genannten Strategieprofile Nash-Gleichgewichte sind. Das Profil $(\Box, \Box)$ ist offensichtlich ein Nash-Gleichgewicht, denn Abweichungen verringern den Nutzen von 0 auf -2. Sei also Θ eine erfüllende Belegung von φ. Betrachte das Profil $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ und speziell $U(a, \alpha^\Theta)$ für alle *reinen* Strategien $a \in L(\varphi) \cup V(\varphi) \cup C(\varphi) \cup \{\Box\}$. Wir unterscheiden fünf Fälle:

1. falls $a \in L(\Theta)$: Spieler 2 spielt immer ein Literal $a' \in L(\Theta)$. Da auch $a \in L(\Theta)$, können a und a' nicht komplementär sein. Also erhält Spieler 1 den Nutzen 1, d.h. $U(a, \alpha^\Theta) = 1$.
2. falls $a \in L(\varphi) \setminus L(\Theta)$: Spieler 2 spielt ein Literal $a' \in L(\Theta)$. Der Nutzen von Spieler 1 ist abhängig davon, ob a' komplementär zu a ist oder nicht, hat aber in jedem Fall einen Wert kleiner oder gleich 1. Somit ist wegen der Linearität des erwarteten Nutzens auch $U(a, \alpha^\Theta) \leq 1$.
3. falls $a \in V(\varphi)$: Spieler 2 spielt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ ein Literal a' mit $v(a') = a$, was Spieler 1 den Nutzen $2 - n$ bringt, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{n}$ ein anderes Literal, was Spieler 1 den Nutzen 2 bringt. Der erwartete Nutzen von Spieler 1 beträgt somit $U(a, \alpha^\Theta) = \frac{1}{n}(2 - n) + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 2 = \frac{2}{n} - 1 + 2 - \frac{2}{n} = 1$.
4. falls $a \in C(\varphi)$: Wegen $\Theta \models \varphi$ gilt auch $\Theta \models a$, d.h. $L(\Theta) \cap a \neq \varnothing$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $1 - \frac{1}{n}$ beträgt der Nutzen von Spieler 1 also 2, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{1}{n}$ beträgt er $2 - n$. Damit ist $U(a, \alpha^\Theta) \leq 2(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}(2 - n) = 1$.
5. falls $a = \Box$: In diesem Fall ist $U(a, \alpha^\Theta) = 1$.

Insgesamt folgt, dass alle $a \in \mathit{supp}(\alpha^\Theta)$ beste Antworten auf α^Θ sind und daher $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ nach dem Support-Lemma ein Nash-Gleichgewicht ist.

Wir müssen nun noch beweisen, dass es in $G(\varphi)$ keine weiteren Nash-Gleichgewichte gibt. Sei dazu (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht in $G(\varphi)$. Wir wollen zunächst ausschließen, dass eine der beiden Strategien α_1, α_2 die reine Strategie $\Box$ ist. Ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \Box$, so liegt zwar ein Nash-Gleichgewicht vor, jedoch kein *neues*, sondern eines der Gleichgewichte, die im Satz von Conitzer und Sandholm erwähnt werden. Ist $\alpha_2 = \Box$, so ist $\alpha_1 = \Box$ die *einzige* beste Antwort auf α_2. Also existiert kein Nash-Gleichgewicht $(\alpha, \Box)$ oder $(\Box, \alpha)$ mit $\alpha \neq \Box$.

Betrachte nun nur noch Fälle mit $\alpha_1(\Box) < 1$ und $\alpha_2(\Box) < 1$. Sei (β_1, β_2) das Strategieprofil, das sich aus (α_1, α_2) in den Situationen ergibt, in denen kein Spieler $\Box$ spielt, d.h. wo für $i \in \{1, 2\}$ gilt, dass $\beta_i(\Box) = 0$ und $\beta_i(a) = \alpha_i(a) \cdot \frac{1}{1 - \alpha_i(\Box)}$ für alle $a \neq \Box$. Es gilt

$U(\beta_1, \beta_2) \geq 1$, denn sonst wäre

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, \beta_2) &= \alpha_1(\Box) \cdot 1 + (1 - \alpha_1(\Box)) \cdot U(\beta_1, \beta_2) \\ &< \alpha_1(\Box) \cdot 1 + (1 - \alpha_1(\Box)) \cdot 1 = 1 = U(\Box, \beta_2) \quad \text{sowie} \\ U(\alpha_1, \Box) &= \alpha_1(\Box) \cdot 0 + (1 - \alpha_1(\Box)) \cdot (-2) \\ &< 0 = U(\Box, \Box), \end{aligned}$$

ein Widerspruch, da α_1 dann keine beste Antwort auf α_2, eine Mischung aus β_2 und $\Box$, sein könnte.

Wegen der Symmetrie von $G(\varphi)$ gilt ebenso $U(\beta_2, \beta_1) \geq 1$. Durch Addition der beiden Ungleichungen erhalten wir

$$U(\beta_1, \beta_2) + U(\beta_2, \beta_1) \geq 2. \tag{4.12}$$

An der Nutzenmatrix lässt sich leicht ablesen, dass *kein* Ausgang eine Nutzensumme echt größer als 2 hat. Also haben *alle* möglichen Ausgänge unter (β_1, β_2) eine Nutzensumme von genau 2 und sind daher von der Art (ℓ, ℓ'), wobei $\ell, \ell' \in L(\varphi)$ und $\ell \neq \bar{\ell}'$. Insbesondere spielt Spieler i keine Variablen oder Klauseln, d.h. $\mathit{supp}(\beta_i) \subseteq L(\varphi)$ und $\mathit{supp}(\alpha_i) \subseteq L(\varphi) \cup \{\Box\}$ für $i \in \{1, 2\}$.

Angenommen, $\Box \in \mathit{supp}(\alpha_i)$. Dann kann sich der andere Spieler verbessern, indem er immer $\Box$ spielt, denn erstens ist $\Box$ eine mindestens so gute Antwort auf alle Aktionen aus $L(\varphi) \cup \{\Box\}$ wie die Aktionen aus $L(\varphi)$ und zweitens ist $\Box$ eine echt bessere Antwort auf $\Box$ als die Aktionen aus $L(\varphi)$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist. Also ist $\Box \notin \mathit{supp}(\alpha_i)$ und damit $\alpha_i = \beta_i$ für alle $i \in \{1, 2\}$.

Wegen Ungleichung (4.12) ist somit $U(\alpha_1, \alpha_2) + U(\alpha_2, \alpha_1) \geq 2$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, \alpha_2) = U(\alpha_2, \alpha_1) &= 1 \quad \text{und damit} & (4.13) \\ u(a_1, a_2) = u(a_2, a_1) &= 1 \quad \text{für alle } a_i \in \mathit{supp}(\alpha_i). & (4.14) \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt ist zu zeigen, dass $\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) = \frac{1}{n}$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Angenommen, es gibt eine Variable $v \in V(\varphi)$ so, dass Spieler i mit Wahrscheinlichkeit $p < \frac{1}{n}$ ein zu v gehöriges Literal spielt. Dann könnte der Gegner durch Spielen von v seinen Nutzen erhöhen, denn

$$U(v, \alpha_i) \quad = \quad p \cdot (2 - n) + (1 - p) \cdot 2 = 2p - pn + 2 - 2p = 2 - pn > 2 - \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

wegen Gleichung (4.13) im Widerspruch dazu, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist. Also gibt es keine Variable $v \in V(\varphi)$, deren Literale zusammen mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als $\frac{1}{n}$ gespielt werden, d.h. $\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) \geq \frac{1}{n}$. Wegen $n = |V(\varphi)|$ folgt durch Aufsummieren über alle Variablen und unter Beachtung, dass α_i eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, dass

$$\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) = \frac{1}{n} \tag{4.15}$$

für alle $\ell \in L(\varphi)$ und $i \in \{1, 2\}$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\mathit{supp}(\alpha_i)$ einer Variablenbelegung für φ entspricht, d.h. dass $\{\ell, \bar{\ell}\} \not\subseteq \mathit{supp}(\alpha_i)$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Nach Gleichung (4.15) spielt jeder Spieler mindestens ein Element aus $\{\ell, \bar{\ell}\}$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Nach Gleichung (4.14) kann es nicht sein, dass ein Spieler mit positiver Wahrscheinlichkeit ℓ und der andere mit positiver Wahrscheinlichkeit $\overline{\ell}$ spielt, da in diesem Fall der Nutzen beider Spieler -2 wäre. Somit können beide Spieler nur entweder ℓ oder $\overline{\ell}$ spielen, genauer:

$$\alpha_1(\ell) = \alpha_2(\ell) = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \alpha_1(\bar{\ell}) = \alpha_2(\bar{\ell}) = 0$$

oder

$$\alpha_1(\ell) = \alpha_2(\ell) = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_1(\bar{\ell}) = \alpha_2(\bar{\ell}) = \frac{1}{n}.$$

Zum Abschluss des Beweises bleibt noch zu zeigen, dass $supp(\alpha_1)$ einer *erfüllenden* Belegung entspricht. Angenommen, Θ ist eine nicht-erfüllende Variablenbelegung für φ. Sei etwa $\alpha_1 = \alpha^{\Theta}$. Da $\Theta \not\models \varphi$, gibt es eine Klausel $c \in C(\varphi)$ mit $c \cap L(\Theta) = \varnothing$. Für dieses c gilt aber $U(c, \alpha_1) = 2 > 1 = U(\alpha_2, \alpha_1)$, im Widerspruch dazu, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist.

Insgesamt haben wir nun bewiesen, dass $(\alpha_1, \alpha_2) = (\square, \square)$ oder $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha^{\Theta}, \alpha^{\Theta})$ für eine φ erfüllende Variablenbelegung Θ sein muss. $\square$

Korollar 10. *Zu entscheiden, ob ein Nash-Gleichgewicht existiert, bei dem Spieler 1 eine Auszahlung von mindestens k erhält, ist* **NP***-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.*

Korollar 11. *Zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht mit Pareto-optimalem Auszahlungsprofil gibt, ist* **NP***-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen. (Ein Nash-Gleichgewicht hat ein Pareto-optimales Auszahlungsprofil $(v_1, \dots, v_n)$, wenn es kein anderes Nash-Gleichgewicht gibt, für dessen Auszahlungsprofil $(v'_1, \dots, v'_n)$ gilt, dass $v'_i \geq v_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ und dass es ein $i = 1, \dots, n$ mit $v'_i > v_i$ gibt.)*

Korollar 12. *Es ist* **NP***-schwer zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht gibt, in dem ein Spieler eine bestimmte Aktion manchmal (bzw. nie) spielt. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.*

Korollar 13. *Es ist* **NP***-schwer zu entscheiden, ob ein Spiel mindestens zwei Nash-Gleichgewichte besitzt.*

5 Extensive Spiele mit perfekter Information

In Spielen hat man oft mehrere Züge hintereinander, was mit strategischen Spielen ohne weiteres nicht modelliert werden kann. Das Spiel kann dann aber durch einen Spielbaum beschrieben werden. Strategien sind nun nicht mehr einzelne Aktionen oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Aktionen, sondern Vorschriften, die für jeden Entscheidungspunkt im Spielbaum festlegen, welche Aktion dort gewählt wird.

Die extensive Form eines Spiels kann man in eine strategische Form übersetzen, in welcher man anschließend die Nash-Gleichgewichte bestimmen kann.

5.1 Formalisierung von extensiven Spielen

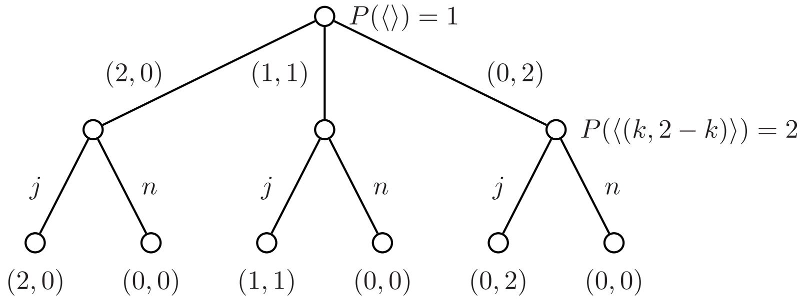
Definition 48 (Extensives Spiel mit perfekter Information)**.** Ein **extensives Spiel mit perfekter Information**, d.h. ein Spiel, in dem alle Spieler zu allen Zeitpunkten alle Informationen besitzen, die sie benötigen, um ihre Entscheidung zu treffen, hat folgende Komponenten:

- Eine endliche nicht-leere Menge N von Spielern.
- Eine Menge H (**Historien**) von Sequenzen mit folgenden Eigenschaften:
  - Die leere Sequenz $\langle\rangle$ gehört zu H
  - Falls $\langle a^1, \dots, a^k \rangle \in H$ (wobei $k = \infty$ sein kann) und $l < k$, dann ist auch $\langle a^1, \dots, a^l \rangle \in H$
  - Falls für eine unendliche Sequenz $\langle a^i \rangle_{i=1}^{\infty}$ gilt, dass $\langle a^i \rangle_{i=1}^{k} \in H$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann auch $\langle a^i \rangle_{i=1}^{\infty} \in H$.

  Alle unendlichen Historien und alle Historien $\langle a^i \rangle_{i=1}^{k} \in H$, für die es kein a^{k+1} gibt, so dass $\langle a^i \rangle_{i=1}^{k+1} \in H$, heißen terminale Historien. Die Menge der terminalen Historien wird mit Z bezeichnet. Elemente einer Historie heißen **Aktionen**.
- Eine Spielerfunktion $P : H \setminus Z \to N$, die bestimmt, welcher Spieler nach einer Historie als nächster am Zug ist.
- Für jeden Spieler $i \in N$ eine Auszahlungsfunktion $u_i : Z \to \mathbb{R}$ auf der Menge der terminalen Historien.

Das Spiel heißt endlich, wenn H endlich ist. Es hat einen **endlichen Horizont**, falls die Länge der Historien nach oben beschränkt ist.

Beispiel 49 (Verteilungsspiel)**.** Zwei gleiche Objekte sollen auf zwei Spieler verteilt werden. Spieler 1 schlägt die Aufteilung vor, Spieler 2 akzeptiert den Vorschlag oder lehnt ihn ab. Wenn Spieler 2 akzeptiert, werden die Objekte so aufgeteilt, wie von Spieler 1 vorgeschlagen, ansonsten erhält keiner der Spieler etwas. Darstellung als Spielbaum:



Formal ist hier $N = \{1, 2\}$, $H = \{\langle\rangle, \langle(2,0)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(0,2)\rangle, \langle(2,0), j\rangle, \langle(2,0), n\rangle, \dots\}$, $P(\langle\rangle) = 1$, $P(h) = 2$ für alle $h \in H \setminus Z$ mit $h \neq \langle\rangle$ und $u_1(\langle(2,0), j\rangle) = 2$, $u_2(\langle(2,0), j\rangle) = 0$, usw.

Notation 50. Sei $h = \langle a^1, \dots, a^k\rangle$ eine Historie und a eine Aktion. Dann ist (h, a) die Historie $\langle a^1, \dots, a^k, a\rangle$. Falls $h' = \langle b^1, \dots, b^l\rangle$, dann ist $(h, h') := \langle a^1, \dots, a^k, b^1, \dots, b^l\rangle$. Die Menge der Aktionen, aus denen der Spieler $P(h)$ nach einer Historie $h \in H \setminus Z$ auswählen kann, notieren wir als

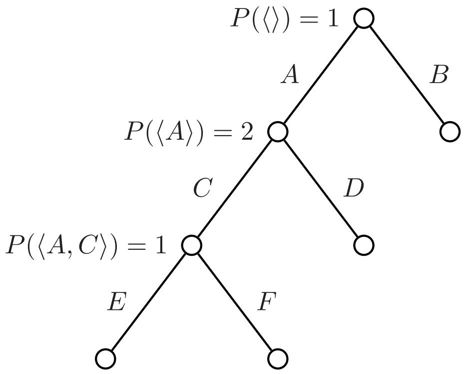
$$A(h) = \{ a \mid (h, a) \in H \}.$$

5.2 Strategien in extensiven Spielen

Definition 51 (Strategie in extensiven Spielen mit perfekter Information)**.** Eine **Strategie** eines Spielers i in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ist eine Funktion s_i, die jeder Historie $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ eine Aktion aus $A(h)$ zuweist.

Notation 52 (für endliche Spiele)**.** Eine Strategie für einen Spieler wird notiert als Folge von Aktionen an Entscheidungspunkten, die in Breitensuche-Reihenfolge besucht werden.

Beispiel 53. Strategienotation in einem endlichen Spiel:



Die Strategien für Spieler 1 sind AE, AF, BE und BF, die Strategien für Spieler 2 sind C und D.

Man notiert auf jeden Fall für jeden einzelnen Knoten die Entscheidung, also auch für Kombinationen, die nie entstehen können. Man betrachtet diese Teilstrategien mit, da der andere Spieler die Strategie auch ändern könnte. Man kann eine Strategie als Programm auffassen, das definiert, was an jedem Punkt zu tun ist.

Definition 54 (Ergebnis)**.** Das **Ergebnis** $O(s)$ für ein Strategieprofil $s = (s_i)_{i \in N}$ ist die, möglicherweise unendliche, terminale Historie $h = \langle a^i \rangle_{i=1}^k$ (mit $k \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$), für die gilt, dass für alle $l \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq l < k$:

$$s_{P(\langle a^1, \ldots, a^l \rangle)}(\langle a^1, \ldots, a^l \rangle) = a^{l+1}.$$

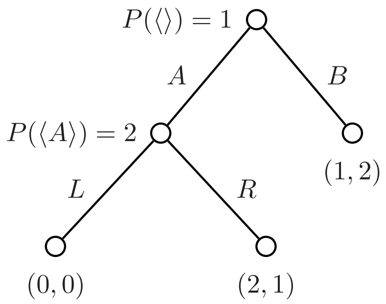
5.3 Nash-Gleichgewichte in extensiven Spielen

Definition 55 (Nash-Gleichgewicht in extensiven Spielen mit perfekter Information)**.** Ein **Nash-Gleichgewicht** in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist ein Strategieprofil s^*, so dass für jeden Spieler $i \in N$ und für alle Strategien s_i gilt, dass

$$u_i(O(s^*_{-i}, s^*_i)) \geq u_i(O(s^*_{-i}, s_i)).$$

Äquivalent kann man die **strategische Form** von extensiven Spielen definieren.

Beispiel 56. Betrachte das durch den folgenden Spielbaum beschriebene extensive Spiel mit perfekter Information.



Spieler 1 hat die Strategien A und B, Spieler 2 die Strategien L und R zur Auswahl. Die strategische Form dieses Spieles ist

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	A	$0, 0$	$2, 1$
	B	$1, 2$	$1, 2$

Die Nash-Gleichgewichte der strategischen Form sind (B, L) und (A, R). Das Nash-Gleichgewicht (B, L) ist jedoch unrealistisch: Spieler 1 spielt hier B, weil dies optimal ist, unter der Bedingung, dass Spieler 2 L spielt. Tatsächlich würde Spieler 2 jedoch in der Situation, in der er zwischen L und R entscheiden muss, niemals L spielen, da er sich dadurch selbst schlechter stellen würde. Man bezeichnet L daher als „leere“ oder „unplausible Drohung“.

Ebenso tritt das Phänomen der „leeren Drohungen“ beim Aufteilungsspiel auf: die Nash-Gleichgewichte der strategischen Form sind $((2,0), jjj)$, $((2,0), jjn)$, $((2,0), jnj)$, $((2,0), jnn)$, $((1,1), njj)$, $((1,1), njn)$, $((0,2), nnj)$, $((2,0), nnj)$ und $((2,0), nnn)$. Bis auf $((2,0), jjj)$ und $((1,1), njj)$ enthalten alle Nash-Gleichgewichte „leere Drohungen“.

5.4 Teilspielperfekte Gleichgewichte

Idee: um Gleichgewichte mit leeren Drohungen auszuschließen, fordert man, dass die Strategien nicht nur in der strategischen Form des gesamten Spieles, sondern auch in der jedes Teilspiels im Gleichgewicht sind.

Definition 57 (Teilspiel)**.** Ein **Teilspiel** eines extensiven Spiels mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$, das nach der Historie h beginnt, ist das Spiel $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (u_i|_h) \rangle$, wobei $H|_h = \{ h' \mid (h, h') \in H \}$, $P|_h(h') = P(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$ und $u_i|_h(h') = u_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$.

Für eine Strategie s_i und Historie h des Spiels Γ sei $s_i|_h$ die durch s_i induzierte Strategie für $\Gamma(h)$, genauer $s_i|_h(h') = s_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$. O_h ist die Ergebnisfunktion für $\Gamma(h)$.

Definition 58 (Teilspielperfektes Gleichgewicht)**.** Ein **teilspielperfektes Gleichgewicht (TPG)** in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist ein Strategieprofil s^*, so dass für jeden Spieler i und für jede nicht-terminale Historie $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ gilt:

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$.

Beispiel 59. Betrachte das extensive Spiel aus Beispiel 56. Die strategische Form dieses Spieles besitzt zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich (A, R) und (B, L). Betrachte zunächst (A, R): in der Historie $h = A$ ist die auf das Teilspiel eingeschränkte Strategiekombination teilspielperfekt, da Spieler 2 dann R wählt. In der Historie $h = \langle \rangle$ erhält Spieler 1 den Nutzen 1 bei Wahl von B und den Nutzen 2 bei Wahl von A; also ist (A, R) ein TPG.

Betrachte nun (B, L): dieses Strategieprofil ist nicht teilspielperfekt, da L in der Historie $h = \langle A \rangle$ nicht den Nutzen von Spieler 2 maximiert.

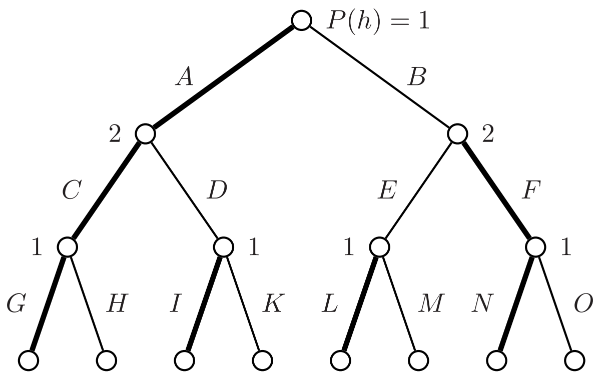
Beispiel 60. Betrachte das Verteilungsspiel aus Beispiel 49. Es gibt drei echte Teilspiele, in denen jeweils Spieler 2 am Zug ist. Nach der Historie $(2, 0)$ sind sowohl j als auch n teilspielperfekt, nach $(1, 1)$ und $(0, 2)$ jeweils nur j. Für das gesamte Spiel kommen also nur Strategieprofile in Frage, bei denen Spieler 2 eine der Strategien jjj oder njj spielt. Davon sind $((2,0), jjj)$ und $((1,1), njj)$ teilspielperfekte Gleichgewichte, $((2,0), njj)$, $((1,1), jjj)$, $((0,2), njj)$ und $((0,2), jjj)$ nicht.

Lemma 14 (Ein-Schritt-Abweichung)**.** *Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ein extensives Spiel mit perfekter Information und* endlichem Horizont*. Das Strategieprofil s^* ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht von Γ gdw. für jeden Spieler $i \in N$ und jede Historie $h \in H$ mit $P(h) = i$ gilt:*

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$, die sich von $s_i^*|_h$ nur in der Aktion unterscheidet, die direkt nach der initialen Historie von $\Gamma(h)$ vorgeschrieben wird.

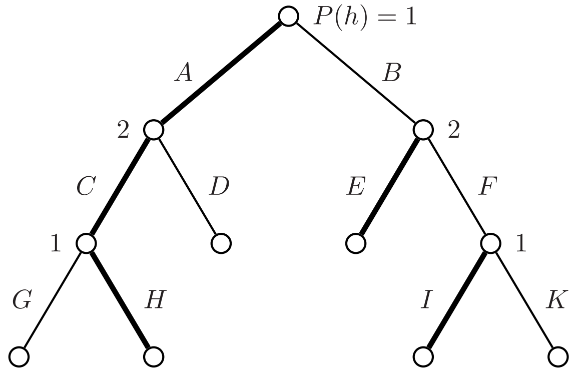
Beweis. Falls s^* ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, gilt die Eigenschaft natürlich. Angenommen, s^* ist kein teilspielperfektes Gleichgewicht. Dann existieren eine Historie h und ein Spieler i so, dass es eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass die Anzahl der Historien h' mit der Eigenschaft, dass $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ ist, höchstens so groß wie die Länge der längsten Historie in $\Gamma(h)$ ist. Diese Annahme ist erlaubt, da es zu jeder profitablen Abweichung s_i von $s_i^*|_h$ eines Spielers i eine profitable Abweichung $\tilde{s_i}$ dieses Spielers gibt, bei der alle Historien h' mit $\tilde{s_i}(h') \neq s_i^*|_h(h')$ auf *einem* Pfad des Spielbaumes liegen. Betrachte dazu etwa die folgende Visualisierung, wobei $s_1^*|_h = AGILN$ und $s_2^*|_h = CF$:



Angenommen, $s_1 = BHKMO$ ist eine profitable Abweichung von Spieler 1. Dann ist auch $\tilde{s_1} = BGILO$ eine profitable Abweichung. $\tilde{s_1}$ unterscheidet sich aber nur an zwei Historien von $s_1^*|_h$, während die längste Historie in $\Gamma(h)$ die Länge drei hat.

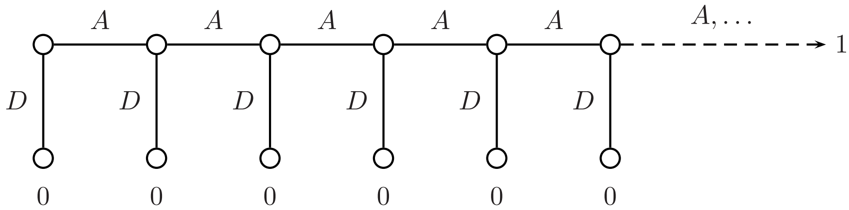
Wegen des endlichen Horizonts von Γ ist diese Anzahl der Historien h' mit der Eigenschaft, dass $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ ist, endlich. Wähle also eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ so, dass die Anzahl der Historien h' mit $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ minimal ist. Sei dann h^* die längste Historie in $\Gamma(h)$ mit $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$. Dann ist die initiale Historie in $\Gamma(h, h^*)$ die einzige, an der sich $s_i|_{h^*}$ von $s_i^*|_{(h,h^*)}$ unterscheidet. Außerdem ist $s_i|_{h^*}$ eine profitable Abweichung in $\Gamma(h, h^*)$, da wir gefordert haben, dass h^* die *längste* Historie in $\Gamma(h)$ mit $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ ist, d.h. $\Gamma(h, h^*)$ ist das gesuchte Teilspiel. $\square$

Beispiel 61. Betrachte das folgende extensive Spiel mit perfekter Information Γ:



Will man zeigen, dass das Profil (AHI, CE) ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, so genügt es, für Spieler 1 die abweichenden Strategien G im Teilspiel $\Gamma(\langle A, C\rangle)$, K im Teilspiel $\Gamma(\langle B, F\rangle)$ und BHI in Γ sowie für Spieler 2 die abweichenden Strategien D im Teilspiel $\Gamma(\langle A\rangle)$ und F im Teilspiel $\Gamma(\langle B\rangle)$ zu betrachten. Insbesondere ist es z. B. nicht notwendig, die abweichende Strategie BGK von Spieler 1 in Γ auf Profitabilität zu untersuchen.

Bemerkung 62. Die entsprechende Aussage für Spiele ohne endlichen Horizont gilt nicht. Betrachte etwa das folgende Ein-Spieler-Spiel:



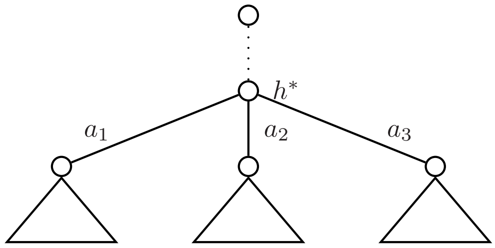
Die Strategie s_i mit $s_i(h) = D$ für alle $h \in H \setminus Z$ ist kein teilspielperfektes Gleichgewicht, da sie von der Strategie s_i^* mit $s_i^*(h) = A$ für alle $h \in H \setminus Z$ dominiert wird, erfüllt jedoch die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft, denn für jedes Teilspiel gilt, dass der Spieler keine bessere Auszahlung erhalten kann, wenn er nur den ersten Schritt ändert.

Definition 63. Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein extensives Spiel mit perfekter Information und endlichem Horizont. Dann bezeichnet $\ell(\Gamma)$ die Länge der längsten Historie von Γ, d.h. $\ell(\Gamma) = \max\{\, |h| \mid h \in H \,\}$.

Satz 15 (Satz von Kuhn)**.** *Jedes endliche extensive Spiel mit perfekter Information hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht.*

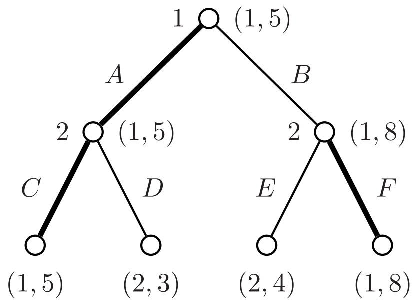
Beweis. Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein endliches extensives Spiel mit perfekter Information. Konstruiere ein teilspielperfektes Gleichgewicht durch Induktion über die Länge $\ell(\Gamma(h))$ für alle Teilspiele $\Gamma(h)$. Konstruiere parallel dazu Funktionen $t_i : H \to \mathbb{R}$ für alle Spieler $i \in N$ so, dass $t_i(h)$ die Auszahlung für Spieler i in einem teilspielperfekten Gleichgewicht im Teilspiel $\Gamma(h)$ angibt.

Falls $\ell(\Gamma(h)) = 0$, dann ist $t_i(h) = u_i(h)$ für alle $i \in N$. Sei $t_i(h)$ für alle $h \in H$ mit $\ell(\Gamma(h)) \leq k$ bereits definiert. Betrachte nun $h^* \in H$ mit $\ell(\Gamma(h^*)) = k + 1$ und $P(h^*) = i$.



Für alle $a \in A(h^*)$ ist $\ell(\Gamma(h^*, a)) \leq k$. Setze $s_i(h^*) := \operatorname{argmax}_{a \in A(h^*)} t_i(h^*, a)$ und $t_j(h^*) := t_j(h^*, s_i(h^*))$ für alle $j \in N$. Induktiv erhalten wir dabei ein Strategieprofil s, das die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft erfüllt. Mit dem vorigen Lemma 14 folgt, dass das Strategieprofil s ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist. $\square$

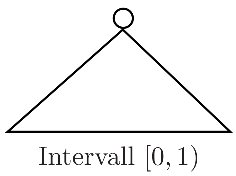
Beispiel 64. Betrachte den Spielbaum



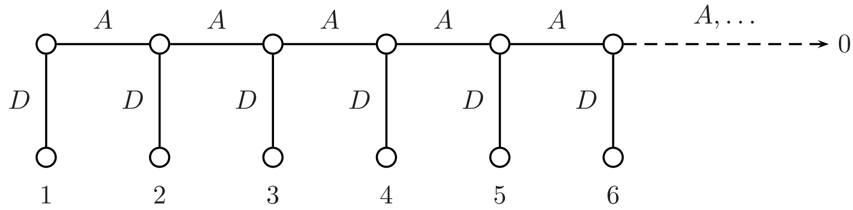
Hier sind $s_2(\langle A\rangle) = C$, $t_1(\langle A\rangle) = 1$, $t_2(\langle A\rangle) = 5$, $s_2(\langle B\rangle) = F$, $t_1(\langle B\rangle) = 1$, $t_2(\langle B\rangle) = 8$ sowie etwa $s_1(\langle\rangle) = A$, $t_1(\langle\rangle) = 1$ und $t_2(\langle\rangle) = 5$.

Bemerkung 65. Die entsprechende Aussage gilt nicht für unendliche Spiele.

1. Das folgende Ein-Personen-Spiel besitzt einen endlichen Horizont, aber einen unendlichen Verzweigungsgrad, nämlich unendlich viele Aktionen $a \in A = [0, 1)$ mit Auszahlungen $u_1(\langle a\rangle) = a$ für alle $a \in A$. Es besitzt kein teilspielperfektes Gleichgewicht.



2. Auch bei unendlichem Horizont, aber endlichem Verzweigungsgrad muss kein teilspielperfektes Gleichgewicht existieren, wie das folgende Beispiel zeigt, wobei $u_1(AAA\dots) = 0$ und $u_1(\underbrace{AA\dots A}_{n}D) = n + 1$.



Beachte außerdem, dass der Satz von Kuhn nichts über die Eindeutigkeit teilspielperfekter Gleichgewichte aussagt. Falls keine zwei Historien von einem Spieler gleich bewertet werden, dann ist das TPG jedoch eindeutig.

5.5 Zwei Erweiterungen

5.5.1 Zufall

Definition 66 (Extensives Spiel mit perfekter Information und Zufallszügen)**.** Ein **extensives Spiel mit perfekter Information und Zufallszügen** ist ein Tupel $\Gamma = \langle N, H, P, f_c, (u_i) \rangle$, wobei N, H und u_i wie bei extensiven Spielen definiert sind, die Spielerfunktion $P : H \setminus Z \to N \cup \{ c \}$ auch den Wert c für einen Zufallsknoten annehmen kann, und für jedes $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = c$ die Funktion $f_c(\cdot|h)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $A(h)$ ist, wobei die Wahrscheinlichkeitsmaße $f_c(\cdot|h)$ für alle $h \in H$ unabhängig voneinander sind.

Strategien in extensiven Spielen mit perfekter Information und Zufallszügen sind wie zuvor definiert. Der Ausgang eines Spieles bei gegebenem Strategieprofil ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß über der Menge der terminalen Historien und U_i ist die erwartete Auszahlung für Spieler i.

Bemerkung 67. Die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft und der Satz von Kuhn gelten weiterhin. Beim Beweis des Satzes von Kuhn muss man nun mit dem *erwarteten* Nutzen arbeiten.

5.5.2 Simultane Züge

Definition 68 (Simultane Züge)**.** Ein **extensives Spiel mit perfekter Information und simultanen Zügen** ist ein Tupel $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$, wobei N, H und (u_i) wie zuvor definiert sind und $P : H \to \mathrm{Pot}(N)$ jeder nichtterminalen Historie eine *Menge* von Spielern zuordnet. Für alle $h \in H \setminus Z$ existiert eine Familie $(A_i(h))_{i \in P(h)}$ so, dass

$$A(h) = \{ a \mid (h, a) \in H \} = \prod_{i \in P(h)} A_i(h).$$

Die beabsichtigte Interpretation simultaner Züge ist, dass alle Spieler aus $P(h)$ gleichzeitig ziehen. Strategien sind dann Funktionen $s_i : h \mapsto a_i$ mit $a_i \in A_i(h)$, Historien sind Sequenzen von Vektoren von Aktionen. In der Definition teilspielperfekter Gleichgewichte muss die Bedingung $P(h) = i$ durch $i \in P(h)$ ersetzt werden.

Bemerkung 69. Der Satz von Kuhn gilt nicht mehr, da zum Beispiel das Matching-Pennies-Spiel auch ein extensives Spiel mit perfekter Information und mit simultanen Zügen ist.

Beispiel 70 (Kuchenverteilspiel)**.** Das Kuchenverteilspiel für 3 Spieler funktioniert wie folgt: zunächst schlägt Spieler 1 vor, wie der Kuchen unter den Spielern aufgeteilt werden soll. Dazu ordnet er jedem Spieler $i \in \{1, 2, 3\}$ einen Anteil $x_i \in [0, 1]$ zu.

Danach entscheiden sich die anderen Spieler *gleichzeitig* und unabhängig voneinander, ob sie mit dieser Aufteilung einverstanden sind. Sie können die Aufteilung entweder akzeptieren (J) oder ablehnen (N).

Wenn alle anderen Spieler die Aufteilung akzeptieren, erhält jeder Spieler $i \in \{1, 2, 3\}$ den ihm zugewiesenen Anteil des Kuchens (Nutzen x_i). Anderenfalls diskutieren die Spieler, bis der Kuchen vergammelt (Nutzen 0).

Formal ergibt sich das folgende extensive Spiel mit perfekter Information und simultanen Zügen: $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$, wobei $N = \{1, 2, 3\}$, $H = \{\langle\rangle\} \cup \{\langle x\rangle \mid x \in X\} \cup \{\langle x, y\rangle \mid x \in X, y \in \{J, N\} \times \{J, N\}\}$ mit $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i = 1\}$. Außerdem ist $P(\langle\rangle) = \{1\}$ und $P(\langle x\rangle) = \{2, 3\}$ für alle $x \in X$ sowie $u_i(\langle x, y\rangle) = 0$, falls $y \in \{(J, N), (N, J), (N, N)\}$ und $u_i(\langle x, y\rangle) = x_i$, falls $y = (J, J)$.

Die teilspielperfekten Gleichgewichte in Γ lassen sich wie folgt bestimmen: wir betrachten zunächst die Teilspiele, die sich ergeben, nachdem Spieler 1 eine Aufteilung $x = (x_1, x_2, x_3)$ gewählt hat. X ist die Menge aller legalen Aufteilungen.

In allen solchen Teilspielen gibt es mindestens zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich (J, J) (beide Spieler akzeptieren die Aufteilung) und (N, N) (keiner der beiden Spieler akzeptiert die Aufteilung). Zusätzlich gibt es in den Teilspielen mit $x_2 = 0$ das Gleichgewicht (N, J) (nur Spieler 3 akzeptiert die Aufteilung) und in den Teilspielen mit $x_3 = 0$ das Gleichgewicht (J, N) (nur Spieler 2 akzeptiert die Aufteilung).

Seien nun s_2 und s_3 beliebige Strategien für die Spieler 2 bzw. 3, so dass für alle Aufteilungen $x \in X$ das Profil $(s_2(\langle x\rangle), s_3(\langle x\rangle))$ eines der oben beschriebenen Nash-Gleichgewichte ist.

Sei ferner $X_J = \{x \in X \mid s_2(\langle x\rangle) = s_3(\langle x\rangle) = J\}$ die Menge der akzeptierten Aufteilungen unter s_2 und s_3. Dann unterscheiden wir drei Fälle:

1. $X_J = \varnothing$ oder $x_1 = 0$ für alle $x \in X_J$. Dann ist (s_1, s_2, s_3) für beliebig gewähltes s_1 ein teilspielperfektes Gleichgewicht.
2. $X_J \neq \varnothing$ und es gibt Verteilungen $x_{\max} = (x_1, x_2, x_3) \in X_J$, die $x_1 > 0$ maximieren. Dann ist (s_1, s_2, s_3) genau dann ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn $s_1(\langle\rangle)$ eine solche Verteilung $x_{\max}$ ist.
3. $X_J \neq \varnothing$ und es gibt keine Verteilungen $(x_1, x_2, x_3) \in X_J$, die x_1 maximieren. Dann gibt es kein teilspielperfektes Gleichgewicht, bei dem Spieler 2 der Strategie s_2 und Spieler 3 der Strategie s_3 folgt.

6 Mechanismusdesign

Beim Mechanismusdesign handelt es sich um einen Teilbereich der Spieltheorie, bei dem es um die Synthese von Spielen geht. Ziel ist es, eine *soziale Entscheidung* als Lösung eines Spiels zu implementieren, also Spiele so zu definieren, dass deren Lösungen (Gleichgewichte) gerade die gewünschten Ausgänge sind.

Beispiele für soziale Entscheidungen sind Wahlen, das Aufstellen einer Berufungsliste, Auktionen und Festlegungen von Policies.

Nicht immer werden die Präferenzen der beteiligten Personen ehrlich angegeben. Mechanismusdesign implementiert die Bestimmung der sozialen Entscheidungen in einer strategischen Umgebung, in der die Präferenzen der Teilnehmer nicht öffentlich sind.

6.1 Soziale Entscheidungen

Wenn wir über soziale Entscheidungen sprechen, verwenden wir häufig Begriffe aus dem Kontext von Wahlen (Kandidaten, Wähler, ...), müssen dabei aber beachten, dass es neben Wahlen auch andere soziale Entscheidungen gibt.

Definition 71 (Soziale Wohlfahrtsfunktion und soziale Entscheidungsfunktion)**.** Sei A eine Menge von Alternativen (Kandidaten) und L die Menge der linearen Ordnungen über A. Bei n Wählern bezeichnet $F : L^n \to L$ eine **soziale Wohlfahrtsfunktion** und $f : L^n \to A$ eine **soziale Entscheidungsfunktion**.

Notation 72. Eine lineare Ordnung $\prec \in L$ wird als **Präferenzrelation** bezeichnet. Für Wähler $i = 1, \dots, n$ ist $\prec_i$ die Präferenzrelation dieses Wählers, d. h. $a \prec_i b$ bedeutet, dass Wähler i den Kandidaten b gegenüber Kandidaten a bevorzugt.

Beispiel 73 (Mehrheitsentscheidung)**.** Die Mehrheitsentscheidung funktioniert gut, wenn man nur zwischen zwei Alternativen auszuwählen hat. Der Mechanismus funktioniert jedoch nicht, falls $|A| \geq 3$ ist (Condorcet-Paradoxon, 1785). Seien etwa die Präferenzen der drei Wähler 1, 2 und 3 bezüglich der drei Kandidaten a, b und c wie folgt:

$$a \prec_1 b \prec_1 c$$
$$b \prec_2 c \prec_2 a$$
$$c \prec_3 a \prec_3 b$$

Dann bevorzugt eine relative Mehrheit der Wähler (nämlich Wähler 1 und 3) Kandidaten b gebenüber a, eine relative Mehrheit (nämlich Wähler 1 und 2) Kandidaten c gegenüber b und eine relative Mehrheit (nämlich Wähler 2 und 3) Kandidaten a gegenüber c. Würde man daraus ableiten, dass auch $a \prec b$, $b \prec c$ und $c \prec a$ gelten müsste, so würde mit der Transitivität von $\prec$ auch $a \prec a$ folgen, was nicht möglich ist, eine solche Definition wäre also inkonsistent. Ganz gleich, welcher der drei Kandidaten schließlich gewählt wird, es gibt immer eine Mehrheit der Wähler, die einen gemeinsamen anderen Kandidaten dem gewählten vorziehen würde.

Neben der Mehrheitsentscheidung gibt es noch eine Reihe von alternativen Methoden. Dazu zählt das **Borda-Wahlverfahren**, bei dem jeder der m Kandidaten vom i-ten Wähler $m-j$ Punkte erhält, wenn er ihn auf Platz j gewählt hat, wenn also der Kandidat in $\prec_i$ an j-ter Stelle steht, und wo schließlich für jeden Kandidaten die Punkte, die er von den Wählern erhalten hat, addiert werden. Daneben gibt es das **Pluralitätsverfahren**, bei dem der Kandidat gewinnt, der bei den meisten Wählern auf dem ersten Platz liegt.

Generelle Fragen, die sich nun stellen, sind die Frage, ob es ein „vernünftiges" Wahlverfahren gibt und wie resistent einzelne Verfahren gegen Manipulierbarkeit sind.

6.2 Arrows Unmöglichkeitsresultat

Arrow postuliert die folgenden Eigenschaften für soziale Wohlfahrtsfunktionen:

1) Totale Einstimmigkeit: Für alle $\prec \in L$ gilt $F(\prec, \ldots, \prec) = \prec$.

1') Partielle Einstimmigkeit: Für alle $\prec_1, \prec_2, \ldots, \prec_n, \prec \in L$ mit $F(\prec_1, \ldots, \prec_n) = \prec$ folgt aus $a \prec_i b$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dass auch $a \prec b$ gilt.

2) Nicht-diktatorische Entscheidung: Ein Wähler i heißt **Diktator** für eine soziale Wohlfahrtsfunktion F, falls für alle Ordnungen $\prec_1, \ldots, \prec_n \in L$ gilt, dass $F(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n) = \prec_i$. F heißt **nicht-diktatorisch**, falls es keinen Diktator für F gibt.

3) Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (UIA): Ob $a \prec b$ gilt, sollte nur von den Präferenzen der Wähler zwischen a und b abhängen, d. h. für alle $\prec_1, \ldots, \prec_n, \prec'_1, \ldots, \prec'_n \in L$ muss gelten: Falls $\prec = F(\prec_1, \ldots, \prec_n)$ und $\prec' = F(\prec'_1, \ldots, \prec'_n)$ und $a \prec_i b$ gdw. $a \prec'_i b$ für alle $i = 1, \ldots, n$, so impliziert dies, dass $a \prec b$ gdw. $a \prec' b$.

Bemerkung 74. Partielle Einstimmigkeit (1') impliziert totale Einstimmigkeit (1), aber nicht umgekehrt.

Proposition 16. *Aus totaler Einstimmigkeit und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen folgt partielle Einstimmigkeit.*

Beweis. Seien $\prec_1, \ldots, \prec_n \in L$ gegeben mit $a \prec_i b$ für alle Wähler i. Sei $\prec = F(\prec_1, \ldots, \prec_n)$. Betrachte $\prec'_1, \ldots, \prec'_n$ mit $\prec'_i = \prec_1$ für alle Wähler i. Offensichtlich gilt mit der totalen Einstimmigkeit, dass $\prec' = F(\prec'_1, \ldots, \prec'_n) = F(\prec_1, \ldots, \prec_1) = \prec_1$. Also haben wir $a \prec' b$. Da $a \prec_i b$ gdw. $a \prec'_i b$ gilt, folgt mit der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, dass auch $a \prec b$ gdw. $a \prec' b$ gelten muss. Da wir wissen, dass $a \prec' b$ gilt, muss auch $a \prec b$ gelten. $\square$

Lemma 17 (Paarweise Neutralität)**.** *Die soziale Wohlfahrtsfunktion F erfülle (totale bzw. partielle) Einstimmigkeit und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen. Seien $\prec_1, \ldots, \prec_n$ und $\prec'_1, \ldots, \prec'_n$ zwei Präferenzprofile mit $a \prec_i b$ gdw. $c \prec'_i d$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt $a \prec b$ gdw. $c \prec' d$, wenn $\prec = F(\prec_1, \ldots, \prec_n)$ und $\prec' = F(\prec'_1, \ldots, \prec'_n)$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $a \prec b$ (sonst benenne die Kandidaten a und b um) und $b \neq c$ (sonst benenne a und c sowie b und d um). Wir konstruieren ein neues Präferenzprofil $\prec_1'', \dots, \prec_n''$. Dabei sei $c \prec_i'' a$ und $b \prec_i'' d$ für alle $i = 1, \dots, n$, während die Ordnung der Paare (a, b) aus $\prec_i$ und (c, d) aus $\prec_i'$ übernommen wird.

Wegen der Einstimmigkeit folgt $c \prec'' a$ und $b \prec'' d$ für $\prec'' = F(\prec_1'', \dots, \prec_n'')$. Wegen der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen gilt $a \prec'' b$. Dann folgt mit Transitivität, dass $c \prec'' d$. Mit der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen folgt schließlich, dass $c \prec' d$.

Die Rückrichtung der Äquivalenz wird analog bewiesen. □

Beispiel 75. Dieses Beispiel illustriert die Konstruktion des Präferenzprofils $\prec_1'', \dots, \prec_n''$ im obigen Beweis. Gelte etwa

$$e \prec_i a \prec_i c \prec_i b \prec_i f$$
$$g \prec_i' a \prec_i' f \prec_i' c \prec_i' d$$

Dann könnte $\prec_i''$ die Alternativen a, b, c und d etwa so anordnen:

$$\dots \prec_i'' c \prec_i'' \dots \prec_i'' a \prec_i'' \dots \prec_i'' b \prec_i'' \dots \prec_i'' d \prec_i'' \dots$$

Insbesondere wäre also $a \prec_i'' b$ und $c \prec_i'' d$.

Satz 18 (Arrows Unmöglichkeitssatz)**.** *Jede soziale Wohlfahrtsfunktion über einer Menge von mehr als zwei Alternativen, die Einstimmigkeit und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt, ist diktatorisch.*

Beweis. Betrachte zwei Elemente $a, b \in A$ mit $a \neq b$ und konstruiere eine Folge $(\pi^i)_{i=0,\dots,n}$ von Präferenzprofilen, so dass in π^i genau die ersten i Wähler b vor a präferieren, d. h. $a \prec_j b$ gdw. $j \leq i$:

	π^0	$\dots$	π^{i^*-1}	π^{i^*}	$\dots$	π^n
$1:$	$b \prec_1 a$	$\dots$	$a \prec_1 b$	$a \prec_1 b$	$\dots$	$a \prec_1 b$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$i^*-1:$	$b \prec_{i^*-1} a$	$\dots$	$a \prec_{i^*-1} b$	$a \prec_{i^*-1} b$	$\dots$	$a \prec_{i^*-1} b$
$i^*:$	$b \prec_{i^*} a$	$\dots$	$b \prec_{i^*} a$	$a \prec_{i^*} b$	$\dots$	$a \prec_{i^*} b$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$n:$	$b \prec_n a$	$\dots$	$b \prec_n a$	$b \prec_n a$	$\dots$	$a \prec_n b$
$F:$	$b \prec^0 a$	$\dots$	$b \prec^{i^*-1} a$	$a \prec^{i^*} b$	$\dots$	$a \prec^n b$

Wegen der Einstimmigkeit gilt für $\prec^0 = F(\pi^0)$, dass $b \prec^0 a$, und für $\prec^n = F(\pi^n)$ gilt, dass $a \prec^n b$. Also muss es einen minimalen Index i^* geben, so dass $b \prec^{i^*-1} a$ und $a \prec^{i^*} b$, wenn $\prec^{i^*-1} = F(\pi^{i^*-1})$ und $\prec^{i^*} = F(\pi^{i^*})$. Wir zeigen, dass i^* ein Diktator ist. Betrachte zwei Elemente $c, d \in A$ mit $c \neq d$. Wir werden zeigen, dass $c \prec_{i^*} d$ impliziert, dass $c \prec d$, wenn $\prec = F(\prec_1, \dots, \prec_{i^*}, \dots, \prec_n)$ für beliebige $\prec_1, \dots, \prec_n \in L$. Betrachte $e \notin \{c, d\}$ und konstruiere ein Präferenzprofil $\prec_1', \dots, \prec_n'$, wobei

$$\begin{aligned}
&\text{für } j < i^* \text{ gilt } e \prec_j' c \prec_j' d \text{ bzw. } e \prec_j' d \prec_j' c,\\
&\text{für } j = i^* \text{ gilt } c \prec_j' e \prec_j' d \text{ bzw. } d \prec_j' e \prec_j' c,\\
&\text{für } j > i^* \text{ gilt } c \prec_j' d \prec_j' e \text{ bzw. } d \prec_j' c \prec_j' e,
\end{aligned}$$

jeweils je nachdem, ob $c \prec_j d$ oder $d \prec_j c$.

Wegen der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen gilt für $\prec' = F(\prec'_1, \ldots, \prec'_n)$, dass $c \prec' d$ gdw. $c \prec d$. Für (e, d) haben wir die gleichen Präferenzen in $\prec'_1, \ldots, \prec'_n$ wie in π^{i^*} für das Paar (a, b) (s.u.). Für $j \neq i^*$ gilt das unabhängig davon, ob $c \prec_j d$ oder $d \prec_j c$, für $j = i^*$ gilt nach Voraussetzung $c \prec_j d$ und damit nach Definition $e \prec'_j d$. Wegen der paarweisen Neutralität folgt deshalb, dass $e \prec' d$. Entsprechend haben wir in $\prec'_1, \ldots, \prec'_n$ für (e, c) die gleichen Präferenzen wie für (a, b) in dem Profil π^{i^*-1}. Wegen der paarweisen Neutralität folgt deshalb, dass $c \prec' e$.

	π^{i^*-1}	$(\prec'_i)_{i=1,\ldots,n}$	π^{i^*}	$(\prec'_i)_{i=1,\ldots,n}$
$1:$	$a \prec_1 b$	$e \prec_1 c$	$a \prec_1 b$	$e \prec_1 d$
$i^*-1:$	$a \prec_{i^*-1} b$	$e \prec_{i^*-1} c$	$a \prec_{i^*-1} b$	$e \prec_{i^*-1} d$
$i^*:$	$b \prec_{i^*} a$	$c \prec_{i^*} e$	$a \prec_{i^*} b$	$e \prec_{i^*} d$
$n:$	$b \prec_n a$	$c \prec_n e$	$b \prec_n a$	$d \prec_n e$
$F:$	$b \prec^{i^*-1} a$	$c \prec' e$	$a \prec^{i^*} b$	$e \prec' d$

Mit Transitivität folgt $c \prec' d$. Nach Konstruktion von $\prec'$ und mit der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen folgt, dass $c \prec d$ gilt, was zu zeigen war. Der Beweis der Rückrichtung ist analog. □

Nach dem Satz von Arrow ist jede soziale Wohlfahrtsfunktion über einer Menge von mehr als zwei Alternativen, die Einstimmigkeit und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt, diktatorisch. Viele soziale Wohlfahrtsfunktionen sind jedoch keine Diktaturen und erfüllen die Einstimmigkeitsforderung. Das Problem liegt daher häufig bei der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen. Diese wiederum hängt eng mit der Nicht-Manipulierbarkeit zusammen, da das Einfügen von irrelevanten Alternativen zwischen dem bevorzugten Kandidaten und dessen Hauptkonkurrenten bei vielen sozialen Wohlfahrtsfunktionen das Ergebnis zugunsten des bevorzugten Kandidaten beeinflussen kann, auch wenn man dessen künstlich in der Angabe der eigenen Präferenzen nach unten gesetzten Hauptkonkurrenten eigentlich gegenüber den dazwischengesetzten dritten Kandidaten bevorzugt.

Es stellt sich die Frage, ob sich Arrows negatives Resultat auch auf sozialen *Entscheidungs*funktionen übertragen lässt und ob ein Zusammenhang zu Arrows Ergebnis besteht.

6.3 Resultat von Gibbard und Satterthwaite

Intuitiv besagt das Resultat von Gibbard und Satterthwaite, dass alle vernünftigen sozialen Entscheidungsfunktionen manipulierbar sind. Dabei ist eine soziale Entscheidungsfunktion manipulierbar, wenn ein Wähler i, der b vor a präferiert, b erzwingen kann, wenn er statt seiner wahren Präferenz $\prec_i$ eine davon verschiedene Präferenz $\prec'_i$ angibt.

Definition 76 (Strategische Manipulation, Anreizkompatibilität)**.** Eine soziale Entscheidungsfunktion kann durch Wähler i **strategisch manipuliert** werden, falls es Präferenzen $\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n, \prec'_i \in L$ gibt, so dass $a \prec_i b$ gilt für $a = f(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n)$ und $b = f(\prec_1, \ldots, \prec'_i, \ldots, \prec_n)$. Die Funktion f heißt **anreizkompatibel**, falls f nicht strategisch manipulierbar ist.

Eine alternative Charakterisierung desselben Sachverhalts basiert auf der Monotonie von f.

Definition 77 (Monotonie). Eine soziale Entscheidungsfunktion heißt **monoton**, falls aus $f(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n) = a$, $f(\prec_1, \ldots, \prec'_i, \ldots, \prec_n) = b$ und $a \neq b$ folgt, dass $b \prec_i a$ und $a \prec'_i b$.

Satz 19. *Eine soziale Entscheidungsfunktion ist genau dann monoton, wenn sie anreizkompatibel ist.*

Beweis. Sei f monoton. Wann immer $f(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n) = a$, $f(\prec_1, \ldots, \prec'_i, \ldots, \prec_n) = b$ und $a \neq b$ gelten, gilt dann auch $b \prec_i a$ und $a \prec'_i b$. Dann kann es keine $\prec_1, \ldots, \prec_n, \prec'_i \in L$ geben, so dass $f(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n) = a$, $f(\prec_1, \ldots, \prec'_i, \ldots, \prec_n) = b$ und $a \prec_i b$. Umgekehrt zeigt auch eine Manipulationsmöglichkeit, dass die Monotonie verletzt ist. □

Der Begriff eines Diktators kann analog zum Diktator für soziale Wohlfahrtsfunktionen auch für soziale Entscheidungsfunktionen definiert werden.

Definition 78 (Diktator). Wähler i heißt **Diktator** in einer sozialen Entscheidungsfunktion f, falls für alle $\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n \in L$ gilt, dass $f(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n) = a$, wobei a der eindeutig bestimmte Kandidat mit $b \prec_i a$ für alle $b \in A$ mit $b \neq a$ ist. Die Funktion f heißt **diktatorisch**, falls es einen Diktator in f gibt.

Um das Resultat von Gibbard und Satterthwaite zu beweisen, wollen wir auf den bereits bewiesenen Satz von Arrow zurückgreifen. Dazu konstruieren wir aus einer sozialen Entscheidungsfunktion eine soziale Wohlfahrtsfunktion.

Notation 79. Sei $S \subseteq A$ und $\prec \in L$. Mit $\prec^S$ bezeichnen wir dann die Ordnung, die wir erhalten, wenn alle Elemente aus S in $\prec$ „nach oben" geschoben werden, während die Präferenzen der Elemente in S untereinander sowie der Elemente in $A \setminus S$ untereinander beibehalten werden, genauer: Für $a, b \in S$ gilt $a \prec^S b$ gdw. $a \prec b$, für $a, b \notin S$ gilt $a \prec^S b$ gdw. $a \prec b$ und für $a \notin S$, $b \in S$ gilt $a \prec^S b$. Durch diese Bedingungen ist die Ordnung $\prec^S$ eindeutig bestimmt.

Wir wollen zunächst einige technische Lemmata beweisen. Das erste davon besagt, dass für anreizkompatible und surjektive soziale Entscheidungsfunktionen f der gewählte Kandidat zu der Kandidatenmenge S gehört, wenn alle Wähler die Kandidaten aus S an der Spitze ihrer Präferenzlisten haben.

Lemma 20 (Top-Präferenz). *Sei f eine anreizkompatible und surjektive soziale Entscheidungsfunktion. Dann gilt für alle $\prec_1, \ldots, \prec_n \in L$ und alle $\varnothing \neq S \subseteq A$, dass $f(\prec_1^S, \ldots, \prec_n^S) \in S$.*

Beweis. Sei $a \in S$. Da f surjektiv ist, existieren $\prec'_1, \ldots, \prec'_n \in L$, so dass $f(\prec'_1, \ldots, \prec'_n) = a$. Nun ändere schrittweise für $i = 1, \ldots, n$ die Relation $\prec'_i$ zu $\prec_i^S$. Zu keinem Zeitpunkt kann dabei $b \notin S$ als Ergebnis von f entstehen, da f monoton ist. □

Soziale Entscheidungsfunktionen können wie folgt zu sozialen Wohlfahrtsfunktionen erweitert werden.

Definition 80 (Erweiterung einer sozialen Entscheidungsfunktion)**.** Die Funktion $F : L^n \to L$, die die soziale Entscheidungsfunktion f **erweitert**, ist definiert durch:

$$F(\prec_1, \ldots, \prec_n) = \prec, \quad \text{wobei } a \prec b \text{ gdw. } f(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}}) = b \text{ für alle } a, b \in A.$$

Lemma 21. *Falls f eine anreizkompatible und surjektive soziale Entscheidungsfunktion ist, dann ist ihre Erweiterung F eine soziale Wohlfahrtsfunktion.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass die resultierende Relation eine strikte lineare Ordnung ist, also asymmetrisch, total und transitiv.

Asymmetrie und Totalität: Wegen des Top-Präferenz-Lemmas ist $f(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}})$ eines von a oder b, d. h. $a \prec b$ oder $b \prec a$, aber nicht beides (Asymmetrie) und nicht keines von beiden (Totalität).

Transitivität: Wir dürfen die Totalität schon voraussetzen. Angenommen, $\prec$ wäre nicht transitiv, d. h. $a \prec b$ und $b \prec c$, aber nicht $a \prec c$, für geeignete a, b und c. Wegen der Totalität hätten wir dann $c \prec a$. Betrachte $S = \{a, b, c\}$ und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(\prec_1^{\{a,b,c\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b,c\}}) = a$. Wegen der Monotonie von f folgt $f(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}}) = a$ durch schrittweise Änderung von $\prec_i^{\{a,b,c\}}$ zu $\prec_i^{\{a,b\}}$. Also haben wir $b \prec a$ im Widerspruch zur Annahme. □

Lemma 22 (Erweiterungslemma)**.** *Falls f eine anreizkompatible, surjektive und nicht-diktatorische soziale Entscheidungsfunktion ist, so ist ihre Erweiterung F eine soziale Wohlfahrtsfunktion, die Einstimmigkeit, Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen und nicht-diktatorische Entscheidung erfüllt.*

Beweis. Wir wissen schon, dass die Erweiterung eine soziale Wohlfahrtsfunktion ist und müssen noch Einstimmigkeit, Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen und Nicht-Diktatur zeigen.

Einstimmigkeit: Sei $a \prec_i b$ für alle i. Dann ist $(\prec_i^{\{a,b\}})^{\{b\}} = \prec_i^{\{a,b\}}$. Wegen des Top-Präferenz-Lemmas folgt $f(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}}) = b$, also $a \prec b$.

Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen: Falls für alle i gilt, dass $a \prec_i b$ gdw. $a \prec_i' b$, dann muss $f(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}}) = f(\prec_1'^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n'^{\{a,b\}})$ gelten, da sich das Ergebnis wegen der Monotonie nicht ändert, wenn man schrittweise $\prec_i^{\{a,b\}}$ durch $\prec_i'^{\{a,b\}}$ ersetzt.

Nicht-Diktatur: Offensichtlich. □

Nun können wir den Satz von Gibbard-Satterthwaite, das Analogon zum Satz von Arrow für soziale Entscheidungsfunktionen, beweisen, indem wir eine gegebene soziale Entscheidungsfunktion zu einer sozialen Wohlfahrtsfunktion erweitern und auf diese den Satz von Arrow anwenden.

Satz 23 (Satz von Gibbard-Satterthwaite)**.** *Falls f eine anreizkompatible und surjektive soziale Entscheidungsfunktion ist, so dass drei oder mehr Alternativen wählbar sind, dann ist f diktatorisch.*

Mechanismusdesign versucht, die negativen Resultate von Arrow bzw. Gibbard-Satterthwaite durch Änderungen des Modells zu entschärfen. Die beiden üblicherweise untersuchten Änderungen sind die Einführung von Geld sowie die Einschränkung der zulässigen Präferenzrelationen.

6.4 Exkurs: Eingesetzte Wahlverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir einige in der Realität eingesetzte Wahlverfahren vorstellen.

Definition 81 (Pluralitätswahl)**.** Bei der **Pluralitätswahl** (auch **relative Mehrheitswahl**, first-past-the-post, winner-takes-all) nennt jeder Wähler einen Kandidaten und der Kandidat mit den meisten Stimmen gewinnt.

Zu den Nachteilen der Pluralitätswahl gehört, dass die Präferenzen der „unterlegenen Wähler“ keine Rolle spielen. Der gewählte Kandidat wird im Allgemeinen nur von einer Minderheit gestützt. Das Verfahren ist manipulierbar.

Definition 82 (Pluralitätswahl in zwei Runden)**.** Bei der **Pluralitätswahl in zwei Runden mit Stichwahl** wird die erste Runde wie eine gewöhnliche Pluralitätswahl abgehalten, und in der zweiten Runde treten die beiden Kandidaten mit den meisten Stimmen aus der ersten Runde gegeneinander an.

Die Nachteile der Pluralitätswahl in zwei Runden sind ähnlich denen der Pluralitätswahl mit nur einer Runde.

Definition 83 (Präferenzwahl mit übertragbaren Stimmen)**.** Bei der **Präferenzwahl mit übertragbaren Stimmen** gibt jeder Wähler eine Präferenzliste ab. Dann wird jeweils so lange der Kandidat von der Liste eliminiert, der am wenigsten Erstpräferenzen hat, bis ein Kandidat die Majorität bei den Erstpräferenzen hat.

Die Präferenzwahl mit übertragbaren Stimmen lässt sich am besten an einem Beispiel illustrieren.

Beispiel 84. Angenommen, es findet eine Präferenzwahl mit übertragbaren Stimmen zwischen den drei Kandidaten Anton, Berta und Claus statt. Die Wählerpräferenzen ergeben sich aus der folgenden Tabelle.

Anzahl Wähler	39	14	5	42
Erster in Präferenzliste	A	B	B	C
Zweiter in Präferenzliste	B	A	C	B
Dritter in Präferenzliste	C	C	A	A

Dann hat Kandidat Anton in der ersten Runde 39 Erstpräferenzen, Kandidatin Berta 19 Erstpräferenzen und Kandidat Claus 42 Erstpräferenzen. Also wird Berta gestrichen. Es bleiben die folgenden Präferenzen.

Anzahl Wähler	39	14	5	42
Erster in Präferenzliste	A	A	C	C
Zweiter in Präferenzliste	C	C	A	A

Also hat Anton in der zweiten Runde nun 53 Erstpräferenzen, während Claus 47 Erstpräferenzen hat. Anton gewinnt also die Wahl.

Ein Nachteil dieses Verfahrens ist, dass „Kompromisskandidaten“ keine Chance haben. In Beispiel 84 wäre Berta eine solche Kandidatin, da sowohl für eine Mehrheit der Wähler (nämlich 61 von 100) Anton $\prec_i$ Berta als auch für eine Mehrheit der Wähler (nämlich 58 von 100) Claus $\prec_i$ Berta gilt. Damit wäre Berta eine gute Kompromisskandidatin, obwohl sie nur bei wenigen Wählern auf dem ersten Platz steht.

Definition 85 (Condorcet-Methoden)**.** Bei **Condorcet-Methoden** gibt jeder Wähler eine Präferenzliste ab und ein Kandidat gewinnt, wenn er beim paarweisen Vergleich von Kandidaten immer eine Majorität hat.

In Beispiel 84 gewinnt Kandidatin Berta alle paarweisen Vergleiche (61 zu 39 gegen Anton und 58 zu 42 gegen Claus), wäre also bei einem Condorcet-Verfahren gewählt.

Der Hauptnachteil von Condorcet-Methoden ist, dass es wegen des Condorcet-Paradoxons nicht immer einen Sieger gibt. In diesem Fall wendet man spezielle Methoden, wie etwa die Copeland-Methode, an, bei der gezählt wird, wie oft ein Kandidat in paarweisen Vergleichen gewinnt, und der Kandidat, bei dem diese Anzahl am höchsten ist, gewinnt. Auch hier sind noch unentschiedene Situationen möglich.

Mit dem Verfahren von Kemeny-Young gibt es sogar eine Condorcet-Methode (als soziale Wohlfahrts-, nicht Entscheidungsfunktion), bei der der Gewinner NP-schwer zu berechnen ist. Condorcet-Methoden werden von einigen Open-Source-Projekten wie Debian, Gentoo u.a. zur internen Entscheidungsfindung eingesetzt.

6.5 Mechanismen mit Geldeinsatz

Bisher wurden Alternativen mittels Präferenzordnungen bewertet. Nun wollen wir stattdessen Geld zur Bewertung verwenden und führen dazu Funktionen $v_i : A \to \mathbb{R}$ ein, so dass $v_i(a)$ die Bewertung von Alternative a durch Agent i ist. Zusätzlich kann den Agenten Geld bezahlt (oder von ihnen verlangt) werden, wobei $m_i \in \mathbb{R}$ der Betrag ist, den Agent i erhält. Sein Nutzen ist dann $u_i(a) = v_i(a) + m_i$.

6.5.1 Vickrey-Auktion (Zweitpreisauktion)

Gegeben sind n Mitspieler, die ein zu versteigerndes Objekt jeweils *privat* mit Wert w_i belegen. Gewünscht ist, dass der Mitspieler mit der höchsten Bewertung w_i das Objekt bekommen soll. Die Spieler sollen ihre Bewertungen offenbaren, so dass das Objekt dem Spieler zugewiesen werden kann, dem es am meisten wert ist. Der Spieler i, der den Zuschlag erhält, muss einen Preis p^* bezahlen, hat also Nutzen $w_i - p^*$. Spieler, die den Zuschlag nicht erhalten, haben davon Nutzen 0.

Formal ist also $A = N$, wobei ein Ausgang $a \in A$ bedeutet, dass Spieler a den Zuschlag erhält. Würde man festlegen, dass der Gewinner nichts bezahlen muss, wäre also $p^* = 0$, dann würden die Mitspieler das System manipulieren und öffentlich Werte $w'_i \gg w_i$ deklarieren. Würde man andererseits festlegen, dass der Gewinner i als Preis $p^* = w_i$ zahlt, also soviel, wie ihm das Objekt tatsächlich wert ist, dann würden die Spieler von w_i zu $w'_i = w_i - \varepsilon$ abweichen und damit wieder nicht ihre wahren Bewertungen offenbaren.

Die Lösung, die von Vickrey vorgeschlagen wird, besteht darin, dass der Spieler i, der den Zuschlag erhält, den Preis $p^* = \max_{i \neq j} w_j$ zahlen muss.

Definition 86 (Vickrey-Auktion)**.** Der Gewinner der **Vickrey-Auktion** ist der Spieler i mit dem höchsten deklarierten Wert w_i. Er muss den Preis des zweithöchsten Gebots zahlen, also $p^* = \max_{i \neq j} w_j$.

Wie bereits in Beispiel 23 in Abschnitt 2.2 gezeigt, hat bei einer Vickrey-Auktion keiner der Agenten einen Anreiz, einen anderen Wert für das Objekt anzugeben als seine wahre Bewertung.

Proposition 24 (Vickrey)**.** *Ist i einer der Mitspieler und w_i seine Bewertung des Objekts, u_i sein Nutzen, wenn er wahrheitsgemäß w_i als seine Bewertung des Objekts deklariert, und u'_i sein Nutzen, wenn er fälschlich w'_i als seine Bewertung deklariert, dann ist $u_i \geq u'_i$.* □

6.5.2 Anreizkompatible Mechanismen

Im Weiteren werden Präferenzen als Funktionen $v_i : A \to \mathbb{R}$ modelliert. Der Raum aller Funktionen für Spieler i sei V_i. Anders als bei sozialen Entscheidungsfunktionen reicht es jetzt nicht mehr aus, Entscheidungen über die Alternativen zu treffen, sondern es muss auch über Zahlungen entschieden werden.

Definition 87 (Mechanismus)**.** Ein **Mechanismus** besteht aus einer sozialen Entscheidungsfunktion $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$ und einem Vektor von Bezahlungsfunktionen $p_1, \ldots, p_n$, wobei $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$ der Betrag ist, den Spieler i bezahlen muss.

Der Begriff der Anreizkompatibilität lässt sich zwanglos von sozialen Entscheidungsfunktionen auf Mechanismen übertragen.

Definition 88 (Anreizkompatibilität)**.** Ein Mechanismus $(f, p_1, \ldots, p_n)$ heißt **anreizkompatibel**, falls für jeden Spieler $i = 1, \ldots, n$, für alle Präferenzen $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$ und jede Präferenz $v'_i \in V_i$ gilt, dass $v_i(f(v_i, v_{-i})) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(f(v'_i, v_{-i})) - p_i(v'_i, v_{-i})$.

Ist $(f, p_1, \ldots, p_n)$ anreizkompatibel, so zahlt es sich nicht aus, über seine Präferenzen statt der Wahrheit v_i eine Lüge v'_i anzugeben. Mit dem Vickrey-Clarke-Groves-Mechanismus existiert ein anreizkompatibler Mechanismus, der die „soziale Wohlfahrt", also die Summe aller Einzelnutzen $\sum_{i=1}^n v_i(a)$, maximiert. Die Grundidee besteht darin, die Bezahlfunktionen der Spieler so zu wählen, dass der Nutzen der jeweils anderen Spieler in den Bezahlfunktionen wiedergespiegelt wird und jeder Spieler dadurch mit seinem eigenen Nutzen zugleich den gesellschaftlichen Nutzen maximiert.

Definition 89 (Vickrey-Clarke-Groves-Mechanismus)**.** Ein Mechanismus $(f, p_1, \ldots, p_n)$ heißt **Vickrey-Clarke-Groves-Mechanismus (VCG-Mechanismus)**, falls

1. $f(v_1, \ldots, v_n) \in \operatorname{argmax}_{a \in A} \sum_{i=1}^n v_i(a)$ für alle $v_1, \ldots, v_n$ und
2. es Funktionen $h_1, \ldots, h_n$ mit $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \ldots, v_n))$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und $v_1, \ldots, v_n$.

Da $h_i(v_{-i})$ von der deklarierten Präferenz von Spieler i unabhängig ist, kann Spieler i diesen Wert als Konstante c betrachten. Also erhält Spieler i den Nutzen $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) + \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \ldots, v_n)) - c = \sum_{j=1}^n v_j(f(v_1, \ldots, v_n)) - c$.

Satz 25 (Vickrey-Clarke-Groves)**.** *Jeder VCG-Mechanismus ist anreizkompatibel.*

Beweis. Seien i, v_{-i}, v_i und v'_i gegeben. Zu zeigen ist, dass der Nutzen bei Deklaration der wahren Präferenz v_i mindestens so hoch ist wie bei der Deklaration der falschen Präferenz v'_i. Sei dazu $a = f(v_i, v_{-i})$ und $a' = f(v'_i, v_{-i})$. Der Nutzen von Spieler i ist $v_i(a') + \sum_{j \neq i} v_j(a') - h_i(v_{-i})$ bei Deklaration von v'_i und $v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - h_i(v_{-i})$ bei Deklaration von v_i. Da $a = f(v_i, v_{-i})$ die soziale Wohlfahrt über alle Alternativen maximiert, gilt $v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) \geq v_i(a') + \sum_{j \neq i} v_j(a')$. Die Ungleichung gilt natürlich auch, wenn man auf beiden Seiten $h_i(v_{-i})$ subtrahiert, und damit ist $v_i(f(v_i, v_{-i})) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(f(v'_i, v_{-i})) - p_i(v'_i, v_{-i})$. □

6.5.3 Die Clarke-Pivot-Regel

Wir haben bislang noch offengelassen, wie man die Bezahlfunktionen bzw. die Funktionen h_i sinnvoll wählen kann. Alle h_i durch $h_i(v_{-i}) = 0$ zu definieren, wäre zwar zulässig, hätte aber den Nachteil, dass der Mechanismus dadurch im Allgemeinen viel mehr Geld an die Spieler verteilen würde als nötig. Bei nicht-negativen Bewertungen v_i sollten die Spieler nie mehr bezahlen müssen, als ihnen der Ausgang wert ist, und sie sollten nie Geld erhalten, sondern nur selbst zahlen.

Definition 90 (Individuelle Rationalität)**.** Ein Mechanismus wird als **individuell rational** bezeichnet, falls die Spieler immer einen nicht-negativen Nutzen haben, d. h. falls für alle $i = 1, \ldots, n$ und alle $v_1, \ldots, v_n$ gilt, dass $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) - p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$.

Definition 91 (Positiver Transfer)**.** Ein Mechanismus hat keinen **positiven Transfer**, falls keinem Spieler Geld gegeben wird, d. h. für alle Präferenzen $v_1, \ldots, v_n$ gilt $p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$.

Die folgende Wahl der Funktionen h_i führt dazu, dass der Mechanismus individuell rational ist und keinen positiven Transfer hat.

Definition 92 (Clarke-Pivot-Funktion)**.** Die Funktion $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ heißt **Clarke-Pivot-Funktion**.

Diese Wahl der h_i führt zu Bezahlfunktionen $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, wenn $a = f(v_1, \ldots, v_n)$. Damit bezahlt Spieler i genau die Differenz zwischen dem, was die anderen Spieler zusammen ohne ihn erreichen könnten, und dem, was sie mit ihm erreichen.

Beispiel 93. Angenommen, wir haben zwei Spieler 1 und 2 sowie zwei Alternativen a und b mit $v_1(a) = 10$, $v_1(b) = 2$, $v_2(a) = 9$ und $v_2(b) = 15$. Ohne Spieler 1 maximiert Alternative b wegen $v_2(b) = 15 > 9 = v_2(a)$ die Summe über die Bewertungen der restlichen Spieler. Ist aber auch Spieler 1 beteiligt, maximiert Alternative a wegen $v_1(a) + v_2(a) = 10 + 9 = 19 > 17 = 2 + 15 = v_1(b) + v_2(b)$ die Summe über die Bewertungen. Dadurch verschlechtern sich die restlichen Spieler (also Spieler 2) um 6 Einheiten von 15 auf 9. Entsprechend müsste eine Clarke-Pivot-Funktion $h_1(v_2) = 15$ bzw. die Bezahlfunktion $p_1(v_1, \ldots, v_n) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq 1} v_j(b) - \sum_{j \neq 1} v_j(a) = 15 - 9 = 6$ gewählt werden.

Das folgende Lemma bestätigt, dass Clarke-Pivot-Funktionen einen VCG-Mechanismus individuell rational und frei von positiven Transfers macht.

Lemma 26 (Clarke-Pivot-Regel)**.** *Ein VCG-Mechanismus mit Clarke-Pivot-Funktionen hat keine positiven Transfers. Falls $v_i(a) \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, $v_i \in V_i$ und $a \in A$, dann ist der Mechanismus auch individuell rational.*

Beweis. Sei $a = f(v_1, \dots, v_n)$ die Alternative, die $\sum_{j=1}^n v_j(a)$ maximiert, und b die Alternative, die $\sum_{j\neq i} v_j(b)$ maximiert. Der Nutzen von Spieler i beträgt dann $u_i = v_i(a) + \sum_{j\neq i} v_j(a) - \sum_{j\neq i} v_j(b)$. Die Bezahlfunktion für i ist $p_i(v_1, \dots, v_n) = \sum_{j\neq i} v_j(b) - \sum_{j\neq i} v_j(a)$. Es gilt also $p_i(v_1, \dots, v_n) \geq 0$, da b gerade so gewählt wurde, dass $\sum_{j\neq i} v_j(b)$ maximiert wird. Also gibt es keine positiven Transfers. Da $v_i(b) \geq 0$ sein soll, gilt $u_i = v_i(a) + \sum_{j\neq i} v_j(a) - \sum_{j\neq i} v_j(b) \geq \sum_{j=1}^n v_j(a) - \sum_{j=1}^n v_j(b)$. Da a gewählt wurde, um $\sum_{j=1}^n v_j(a)$ zu maximieren, gilt $\sum_{j=1}^n v_j(a) \geq \sum_{j=1}^n v_j(b)$, also $u_i \geq 0$, und damit ist der Mechanismus auch individuell rational. □

Es folgen einige Beispiele für VCG-Mechanismen mit Clarke-Pivot-Regel.

Beispiel 94 (Vickrey-Auktion)**.** Bei Vickrey-Auktionen ist die Menge der Alternativen A gleich der Menge der Spieler N, und der Nutzen eines Spielers ist $v_i(j) = w_i$, falls $j = i$, und $v_i(j) = 0$, falls $j \neq i$, wenn $w_i > 0$ der Wert ist, den das Objekt für Spieler i hat. Die soziale Wohlfahrt wird maximiert, wenn Alternative j den Wert $\sum_{i=1}^n v_i(j)$ maximiert. Weil für jede Alternative j alle Summanden bis auf einen gleich Null sind und der verbleibende Summand den Wert w_j hat, geschieht dies genau dann, wenn w_j maximiert wird, wenn also der Bieter mit der höchsten Bewertung den Zuschlag erhält. Sei $a = f(v_1, \dots, v_n) = \operatorname{argmax}_{j\in A} w_j$ dieser Bieter. Damit es sich um einen VCG-Mechanismus mit Clarke-Pivot-Regel handelt, müssen die Bezahlfunktionen die Form $p_i(v_1, \dots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j\neq i} v_j(a)$ mit $h_i(v_{-i}) = \max_{b\in A} \sum_{j\neq i} v_j(b)$ haben. Es gilt aber $\max_{b\in A} \sum_{j\neq i} v_j(b) = \max_{b\in A\setminus\{i\}} w_b$. Für $i = a$ ist damit $p_i(v_1, \dots, v_n) = \max_{b\in A} \sum_{j\neq i} v_j(b) - \sum_{j\neq i} v_j(a) = \max_{b\in A\setminus\{a\}} w_b - 0 = \max_{b\in A\setminus\{a\}} w_b$, also gerade der Wert des zweithöchsten Gebots. Falls $i \neq a$, so ist $p_i(v_1, \dots, v_n) = \max_{b\in A} \sum_{j\neq i} v_j(b) - \sum_{j\neq i} v_j(a) = \max_{b\in A\setminus\{i\}} w_b - w_a = w_a - w_a = 0$, ein Bieter, der den Zuschlag nicht bekommen hat, zahlt also nichts.

Beispiel 95 (Bilateraler Handel)**.** Ein Verkäufer s bietet ein Objekt an, das er mit $0 \leq w_s \leq 1$ bewertet. Ein potentieller Käufer b bewertet das Objekt mit $0 \leq w_b \leq 1$. Die Alternativen sind $A = \{\textit{trade}, \textit{no-trade}\}$, die Nutzenwerte $v_s(\textit{no-trade}) = 0$, $v_s(\textit{trade}) = -w_s$, $v_b(\textit{no-trade}) = 0$ und $v_b(\textit{trade}) = w_b$. Ein VCG-Mechanismus maximiert $v_s(a) + v_b(a)$. Es ist $v_s(\textit{trade}) + v_b(\textit{trade}) = w_b - w_s$ und $v_s(\textit{no-trade}) + v_b(\textit{no-trade}) = 0$, die Alternative *trade* maximiert die soziale Wohlfahrt also genau dann, wenn $w_b \geq w_s$ gilt, und *no-trade*, sonst. Wir wollen den Mechanismus so gestalten, dass bei Wahl der Alternative *no-trade* beide Spieler nichts zahlen müssen und nichts erhalten, dass also $p_s(v_s, v_b) = p_b(v_s, v_b) = 0$ gilt. Dazu können wir für den Käufer die Clarke-Pivot-Funktion $h_b(v_s) = \max_{a\in A} v_s(a)$ wählen. Für den Verkäufer müssen wir um eine additive Konstante von der Clarke-Pivot-Funktion abweichen und $h_s(v_b) = \max_{a\in A} v_b(a) - w_b$ setzen. Dann haben wir für die Alternative *no-trade*

$$p_s(v_s, v_b) = \max_{a\in A} v_b(a) - w_b - v_b(\textit{no-trade}) = w_b - w_b - 0 = 0 \quad \text{und}$$
$$p_b(v_s, v_b) = \max_{a\in A} v_s(a) - v_s(\textit{no-trade}) = 0 - 0 = 0.$$

Für die Alternative *trade* erhalten wir

$$p_s(v_s, v_b) = \max_{a\in A} v_b(a) - w_b - v_b(\textit{trade}) = w_b - w_b - w_b = -w_b \quad \text{und}$$
$$p_b(v_s, v_b) = \max_{a\in A} v_s(a) - v_s(\textit{trade}) = 0 + w_s = w_s.$$

Wegen $w_b \geq w_s$ erhält also der Verkäufer mindestens so viel wie der Käufer zahlt, d. h. der Handel wird subventioniert. Ohne diese Subventionen wäre ein anreizkompatibler bilateraler Handel nicht möglich. Beachte, dass der Käufer und der Verkäufer das System durch Absprachen ausnutzen können.

Beispiel 96 (Öffentliches Projekt)**.** Ein öffentliches Projekt kostet die Regierung C Kosteneinheiten und wird von jedem Bürger i mit w_i bewertet. Das Projekt sollte durchgeführt werden, wenn $\sum_i w_i \geq C$ ist. Wir nehmen die Regierung als Spieler hinzu, die Kosten C hat, falls das Projekt durchgeführt wird. Die Alternativen sind $A = \{\mathit{project}, \mathit{no\text{-}project}\}$ mit Bewertungen $v_R(\mathit{project}) = -C$, $v_R(\mathit{no\text{-}project}) = 0$, $v_i(\mathit{project}) = w_i$ und $v_i(\mathit{no\text{-}project}) = 0$. Ein VCG-Mechanismus mit Clarke-Pivot-Regel hat die Eigenschaft, dass für jeden Bürger i gilt

$$h_i(v_{-i}) = \max_{a \in A} \left(\sum_{j \neq i} v_j(a) + v_R(a) \right) = \begin{cases} \sum_{j \neq i} w_j - C, & \text{falls } \sum_{j \neq i} w_j > C \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Bezahlfunktion für Bürger i ist $p_i(v_1, \ldots, v_n, v_R) = h_i(v_{-i}) - \big(\sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \ldots, v_n, v_R)) + v_R(f(v_1, \ldots, v_n, v_R))\big)$, also $(\sum_{j \neq i} w_j - C) - (\sum_{j \neq i} w_j - C) = 0$, falls das Projekt bereits stattfindet, ohne dass der Nutzen von Bürger i den Ausschlag zugunsten des Projekts gegeben hätte, $0 - (\sum_{j \neq i} w_j - C) = C - \sum_{j \neq i} w_j$, falls das Projekt nur mit Bürger i stattfindet, falls also $\sum_j w_j \geq C$, aber $\sum_{j \neq i} w_j < C$, und 0, sonst.

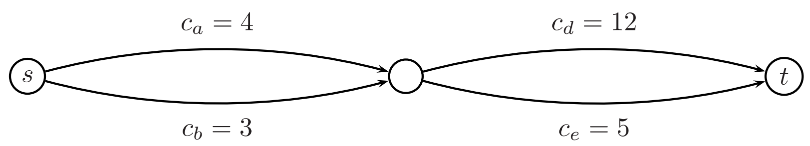
Bürger i bezahlt also $C - \sum_{j \neq i} w_j$ genau dann, wenn er dafür verantwortlich ist, dass das Projekt durchgeführt wird. Er bezahlt nur die Differenz zwischen dem, was das Projekt seinen Mitbürgern wert ist und den Kosten C der Regierung, im Allgemeinen also weniger als w_i. Es gilt immer $\sum_i p_i(\mathit{project}) \leq C$, d. h. es muss wieder Geld zugeschossen werden.

Beispiel 97 (Pfad in Netzwerken)**.** Betrachte ein Kommunikationsnetzwerk, gegeben durch einen Graphen $G = (V, E)$. Jede Kante $e \in E$ gehört einem anderen Spieler (mit dem wir sie identifizieren) und erzeugt bei Benutzung Kosten c_e. Wir wollen einen Pfad zwischen zwei Knoten s und t mieten. Die Menge der Alternativen ist die Menge der Pfade zwischen s und t. Spieler e hat Kosten c_e, falls e auf dem ausgewählten Pfad liegt, sonst Kosten 0. Maximierung der sozialen Wohlfahrt bedeutet hier, $\sum_{e \in p} c_e$ über alle alternativen Pfade p von s nach t zu minimieren. Es ist also $A = \{p \mid p \text{ Pfad von } s \text{ nach } t\}$ und $v_e(p) = -c_e$, falls $e \in p$, und $v_e(p) = 0$, sonst.

Für $G = (V, E)$ und $e \in E$ sei $G \setminus e = (V, E \setminus \{e\})$ der Graph G ohne die Kante e. In einem VGC-Mechanismus mit Clarke-Pivot-Regel ist dann $h_e(v_{-e}) = \max_{p' \in G \setminus e} \sum_{e' \in p'} -c_{e'}$, also die Kosten des günstigesten Pfades von s nach t in $G \setminus e$. Dabei nehmen wir an, dass G zweifach zusammenhängend ist, denn sonst könnte das Entfernen der Kante e den Graphen zerfallen lassen und es könnte keinen alternativen Pfad p' von s nach t geben.

Die Bezahlfunktionen sind $p_e(v_1, \ldots, v_n) = h_e(v_{-e}) - \sum_{e \neq e' \in p} -c_{e'}$, wobei $p = f(v_1, \ldots, v_n)$ der vom Mechanismus gewählte Pfad in G ist. Falls $e \notin p$, so hat diese Funktion den Wert 0, und sonst hat sie den Wert $\max_{p' \in G \setminus e} \sum_{e' \in p'} -c_{e'} - \sum_{e \neq e' \in p} -c_{e'}$.

Sei das Kommunikationsnetz etwa durch den folgenden Graphen gegeben.



Die Gesamtkosten entlang den Kanten b und e betragen dann 8, die Kosten ohne die Kante e betragen 3 und die Kosten des günstigsten Pfades, der e nicht enthält, betragen 15 (nämlich entlang b und d). Damit erhalten wir als Differenz den Wert der Bezahlfunktion $-15-(-3) = -12$, der Besitzer der Kante e erhält also eine Bezahlung von 12 für die Benutzung seiner Kante.

Beachte, dass sich nach Wegfall einer Kante e ein alternativer Pfad von s nach t nicht notwendigerweise nur in einer Kante vom ursprünglichen Pfad unterscheiden muss, d. h. dass es im Allgemeinen nicht ausreicht, die weggefallene Kante e einfach durch eine andere Kante zwischen denselben Knoten zu ersetzen, sondern dass ein alternativer Pfad einen völlig anderen Weg von s nach t wählen kann.

6.6 Implementierung durch dominante Strategien

Die Idee bei der Implementierung durch dominante Strategien ist, strategische Spiele so zu entwerfen, dass man die Spieler dazu bringt, Informationen zu verraten, um die soziale Entscheidungsfunktion zu realisieren. Das Problem dabei ist das private Wissen über die eigenen Präferenzen, das die einzelnen Spieler haben und nicht offenlegen.

Um das unvollständige Wissen der Spieler über die Präferenzen der jeweils anderen Spieler zu modellieren, führen wir Spiele mit strikt unvollständiger Information ein.

6.6.1 Spiele mit strikt unvollständiger Information

Bei Spielen mit strikt unvollständiger Information werden private Informationen formal durch Typen repräsentiert, die ein Spieler annehmen kann und die die Nutzenfunktion beeinflussen.

Definition 98 (Spiel mit unabhängigen privaten Werten und strikt unvollständigem Wissen). Ein **Spiel mit unabhängigen privaten Werten und strikt unvollständigem Wissen** $G = (N, (X_i), (T_i), (u_i))$ ist gegeben durch

1. die Spielermenge N,
2. für jeden Spieler i eine Aktionsmenge X_i,
3. für jeden Spieler i eine Menge T_i von Typen und
4. für jeden Spieler i eine Nutzenfunktion $u_i : T_i \times X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$. Der Wert $u_i(t_i, x_1, \ldots, x_n)$ ist die Auszahlung für Spieler i, falls i den Typ t_i hat und das gespielte Aktionsprofil $(x_1, \ldots, x_n)$ ist.

In den Typen der Spieler ist die gesamte private Information kodiert, darunter insbesondere die Bewertung der Alternativen.

Definition 99 (Strategie). Eine **Strategie** eines Spielers i in einem Spiel mit unabhängigen privaten Werten und strikt unvollständigem Wissen ist eine Funktion $s_i : T_i \to X_i$.

Eine Strategie ist also eine vom Typ abhängige Aktionsauswahl.

Definition 100 (Ex-Post-Nash-Gleichgewicht)**.** Ein Strategieprofil $(s_1, \ldots, s_n)$ in einem Spiel mit unabhängigen privaten Werten und strikt unvollständigem Wissen ist ein **Ex-Post-Nash-Gleichgewicht**, wenn für alle $t_1, \ldots, t_n$ gilt, dass $s_1(t_1), \ldots, s_n(t_n)$ ein Nash-Gleichgewicht in dem Spiel mit vollständiger Information ist, das durch die t_i definiert ist, d. h. $u_i(t_i, s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i})) \geq u_i(t_i, x'_i, s_{-i}(t_{-i}))$ für alle i, alle $t_1, \ldots, t_n$ und alle x'_i.

Beim Ex-Post-Nash-Gleichgewicht wird also nur verlangt, dass man die Strategien der anderen Spieler kennt, nicht aber ihre Typen.

Definition 101 (Schwach dominierende Strategie)**.** Eine Strategie s_i in einem Spiel mit unabhängigen privaten Werten und strikt unvollständigem Wissen ist eine **(schwach) dominierende Strategie**, falls für jedes t_i gilt, dass $s_i(t_i)$ eine (schwach) dominierende Strategie in dem Spiel mit vollständiger Information ist, das durch die t_i definiert ist, d. h. $u_i(t_i, s_i(t_i), x_{-i}) \geq u_i(t_i, x'_i, x_{-i})$ für alle t_i, alle x_{-i} und alle x'_i.

Ein Strategieprofil $(s_1, \ldots, s_n)$ heißt **Gleichgewicht in dominierenden Strategien**, falls jedes s_i eine (schwach) dominierende Strategie ist.

Sowohl der Begriff des Ex-Post-Nash-Gleichgewichts als auch der des Gleichgewichts in dominierenden Strategien scheinen so starke Forderungen an Strategieprofile zu stellen, dass nicht sofort klar ist, ob es solche Strategieprofile in natürlich vorkommenden Spielen überhaupt gibt. Es gibt sie aber zumindest manchmal, wenn wir die Spiele selbst entwerfen dürfen.

Außerdem ist der Begriff des Gleichgewichts in dominierenden Strategien offensichtlich stärker als der des Ex-Post-Nash-Gleichgewichts, er ist aber nicht so viel stärker, wie man annehmen könnte, denn die beiden Gleichgewichte unterscheiden sich nur in den nicht gespielten Aktionen.

Proposition 27. *Sei $(s_1, \ldots, s_n)$ ein Ex-Post-Nash-Gleichgewicht in einem Spiel $G = (N, (X_i), (T_i), (u_i))$. Definiere $X'_i := \{x_i \in X_i \mid x_i = s_i(t_i) \text{ und } t_i \in T_i\}$. Dann ist $(s_1, \ldots, s_n)$ ein Gleichgewicht in dominierenden Strategien in dem Spiel $G' = (N, (X'_i), (T_i), (u_i))$.* □

6.6.2 Allgemeine Mechanismen

Sei $v_i(t_i, a)$ der Wert, den Spieler i mit Typ t_i der Alternative a zuordnet. Wir wollen eine soziale Entscheidungsfunktion $f : T_1 \times \cdots \times T_n \to A$ *implementieren*, die die Einzelbewertungen aggregiert. Wir entwerfen das Spiel so, dass es eine Ergebnisfunktion $a : X_1 \times \cdots \times X_n \to A$ und Bezahlfunktionen $p_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ gibt.

Definition 102 (Allgemeiner Mechanismus)**.** Ein **(allgemeiner) Mechanismus** für die Spielermenge $N = \{1, \ldots, n\}$ ist gegeben durch

1. die Typen der Spieler $T_1, \ldots, T_n$,
2. den Alternativenraum A,
3. die Aktionsmengen $X_1, \ldots, X_n$,
4. die Bewertungsfunktionen $v_i : T_i \times A \to \mathbb{R}$,
5. die Ergebnisfunktion $a : X_1 \times \cdots \times X_n \to A$ und
6. die Bezahlfunktionen $p_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$.

Das durch den Mechanismus induzierte Spiel mit strikt unvollständiger Information ist gegeben durch $G = (N, (X_i), (T_i), (u_i))$, wobei $u_i(t_i, x_1, \ldots, x_n) = v_i(t_i, a(x_1, \ldots, x_n)) - p_i(x_1, \ldots, x_n)$ für alle $i \in N$ und alle $x_1, \ldots, x_n$ gilt.

Der Mechanismus implementiert eine soziale Entscheidungsfunktion $f : T_1 \times \cdots \times T_n \to A$ in dominierenden Strategien, falls es ein Gleichgewicht in dominierenden Strategien $(s_1, \ldots, s_n)$ in dem induzierten Spiel gibt, wobei $s_i : T_i \to X_i$, so dass $f(t_1, \ldots, t_n) = a(s_1(t_1), \ldots, s_n(t_n))$ für alle $t_1, \ldots, t_n$.

Der Mechanismus implementiert f in Ex-Post-Nash-Gleichgewichten, falls es ein Ex-Post-Nash-Gleichgewicht $(s_1, \ldots, s_n)$ in dem induzierten Spiel gibt, so dass für alle $t_1, \ldots, t_n$ gilt, dass $f(t_1, \ldots, t_n) = a(s_1(t_1), \ldots, s_n(t_n))$.

6.6.3 Das Offenbarungsprinzip

Allgemeine Mechanismen sehen mächtiger aus als anreizkompatible Mechanismen, sind es aber nicht, wie der folgende Satz besagt.

Satz 28 (Offenbarungsprinzip)**.** *Falls es einen allgemeinen Mechanismus gibt, der eine soziale Entscheidungsfunktion f in dominierenden Strategien implementiert, dann existiert auch ein anreizkompatibler Mechanismus, der f implementiert. Die Zahlung im anreizkompatiblen Mechanismus ist identisch mit der Zahlung des Originalmechanismus im Gleichgewicht.*

Beweis. Der anreizkompatible Mechanismus wird so konstruiert, dass er die Gleichgewichtsstrategien simuliert. Sei $(s_1, \ldots, s_n)$ ein Gleichgewicht in dominierenden Strategien. Dann definieren wir den anreizkompatiblen Mechanismus durch $f(t_1, \ldots, t_n) = a(s_1(t_1), \ldots, s_n(t_n))$ und $p'_i(t_1, \ldots, t_n) = p_i(s_1(t_1), \ldots, s_n(t_n))$. Da s_i eine dominierende Strategie ist, gilt für alle t_i, x_{-i} und x'_i, dass $v_i(t_i, a(s_i(t_i), x_{-i})) - p_i(s_i(t_i), x_{-i}) \geq v_i(t_i, a(x'_i, x_{-i})) - p_i(x'_i, x_{-i})$. Das gilt speziell für alle $x_{-i} = s_{-i}(t_{-i})$ und $x'_i = s_i(t'_i)$, was der Definition eines anreizkompatiblen Mechanismus entspricht, wenn man Typen und Präferenzen miteinander identifiziert. □

Korollar 29. *Falls es einen allgemeinen Mechanismus gibt, der eine soziale Entscheidungsfunktion f in Ex-Post-Nash-Gleichgewichten implementiert, dann existiert ein anreizkompatibler Mechanismus, der f implementiert. Die Zahlung im anreizkompatiblen Mechanismus ist identisch mit der Zahlung des Originalmechanismus im Ex-Post-Nash-Gleichgewicht.* □

Dieses Korollar ergibt sich aus Proposition 27 über den Zusammenhang zwischen Ex-Post-Nash-Gleichgewichten und Implementierbarkeit in dominierenden Strategien zusammen mit dem vorhergehenden Satz 28.

Trotz des Offenbarungsprinzips können allgemeine Mechanismen sinnvoll sein, etwa wenn es darum geht, den Kommunikations- oder Berechnungsaufwand der Spieler zu reduzieren.

6.7 Charakterisierung von anreizkompatiblen Mechanismen

In diesem Kapitel wollen wir der Frage nachgehen, welche anderen sozialen Entscheidungsfunktionen neben der sozialen Wohlfahrt (also der Summe der Nutzenwerte der beteiligten

Spieler) wir noch implementieren können. Beispielsweise könnten wir im Interesse der Fairness statt der Summe der Nutzenwerte deren Produkt zu maximieren versuchen. Im Fall von Scheduling-Aufgaben könnten wir das Interesse haben, die Produktionsdauer zu minimieren, und falls die soziale Entscheidungsfunktion, die wir implementieren wollen, NP-schwer ist, stellt sich die Frage, ob man dann eine Approximation davon implementieren kann.

6.7.1 Direkte Charakterisierung

Satz 30. *Ein Mechanismus ist genau dann anreizkompatibel, wenn er folgende Bedingungen für alle i und v_{-i} erfüllt:*

1. *Falls $f(v_i, v_{-i}) = f(v'_i, v_{-i})$, so ist $p(v_i, v_{-i}) = p(v'_i, v_{-i})$.*
2. *$f(v_i, v_{-i}) \in \operatorname{argmax}_{a \in A}(v_i(a) - p(v_i, v_{-i}))$ für jedes feste v_{-i}.*

Beweis. Für die Rückrichtung sei $a = f(v_i, v_{-i})$, $a' = f(v'_i, v_{-i})$, $p_a = p(v_i, v_{-i})$ und $p_{a'} = p(v'_i, v_{-i})$. Der Nutzen für Spieler i bei wahrheitsgemäßer Deklaration von v_i ist $v_i(a) - p_a$. Da der Mechanismus für Spieler i den Nutzen optimiert (Bedingung 2), gilt $v_i(a) - p_a \geq v_i(a') - p_{a'}$, d. h. der Mechanismus ist anreizkompatibel.

Für die andere Richtung müssen wir zwei Teile zeigen. Betrachte zunächst den ersten Teil. Falls für irgendwelche v_i, v'_i und v_{-i} gilt, dass $f(v_i, v_{-i}) = f(v'_i, v_{-i})$, aber $p_i(v_i, v_{-i}) > p_i(v'_i, v_{-i})$, so könnte Spieler i seinen Nutzen durch Deklaration von v'_i erhöhen. Dies ist nicht möglich, da der Mechanismus anreizkompatibel ist. Für den zweiten Teil nehmen wir an, dass $f(v_i, v_{-i}) \notin \operatorname{argmax}_{a \in A}(v_i(a) - p_a)$. Bestimme dann $a' \in \operatorname{argmax}_{a \in A}(v_i(a) - p_a)$ für gegebenes v_i. Dann gibt es aber ein v'_i mit $a' = f(v'_i, v_{-i})$, d. h. Spieler i könnte seinen Nutzen durch Angabe von v'_i erhöhen. □

6.7.2 Schwache Monotonie

Definition 103 (Schwache Monotonie)**.** Eine soziale Entscheidungsfunktion erfüllt die Bedingung der **schwachen Monotonie**, falls für alle i und v_{-i} gilt: $f(v_i, v_{-i}) = a \neq b = f(v'_i, v_{-i})$ impliziert $v_i(a) - v_i(b) \geq v'_i(a) - v'_i(b)$.

Es besteht der folgende Zusammenhang zur (starken) Monotonie: Monotonie bedeutet, dass $v_i(a) > v_i(b)$ und $v'_i(b) > v'_i(a)$. Aus der Monotonie folgt also wegen $v_i(a) - v_i(b) > 0 > v'_i(a) - v'_i(b)$ die schwache Monotonie.

Satz 31. *Falls ein Mechanismus $(f, p_1, \ldots, p_n)$ anreizkompatibel ist, dann erfüllt f die schwache Monotonie. Falls alle Mengen V_i, aus denen die Präferenzen v_i gewählt werden können, als Teilmengen $V_i \subseteq \mathbb{R}^A$ konvex sind, dann existieren für alle sozialen Entscheidungsfunktionen f, die die schwache Monotonie erfüllen, Bezahlfunktionen $p_1, \ldots, p_n$, so dass $(f, p_1, \ldots, p_n)$ anreizkompatibel ist.*

Beweis. (Nur eine Richtung). Sei $(f, p_1, \ldots, p_n)$ ein anreizkompatibler Mechanismus und seien i und v_{-i} gegeben. Satz 30 impliziert feste Preise p_a für jedes a, unabhängig von v_i. Angenommen, $f(v_i, v_{-i}) = a \neq b = f(v'_i, v_{-i})$. Dann muss gelten, dass $v_i(a) - p_a \geq v_i(b) - p_b$ und $v'_i(a) - p_a \leq v'_i(b) - p_b$. Durch Aufsummieren erhalten wir $v_i(a) - p_a - v_i(b) + p_b \geq 0 \geq v'_i(a) - p_a - v'_i(b) + p_b$, also $v_i(a) - v_i(b) \geq v'_i(a) - v'_i(b)$. □

6.8 Bayes-Nash-Implementierung

Ex-Post-Nash-Gleichgewichte sind ein Worst-Case-Modell. Normalerweise macht man aber Annahmen über die Verteilung von Typen und versucht, darüber zu optimieren. Dies geschieht bei der Bayes-Nash-Implementierung.

Definition 104 (Spiel mit unabhängigen privaten Werten und unvollständiger Information)**.** Ein **Spiel mit unabhängigen privaten Werten und unvollständiger Information** mit n Spielern $G = (N, (X_i), (T_i), (D_i), (u_i))$ ist gegeben durch N, T_i, X_i, u_i wie bei Spielen mit strikt unvollständiger Information sowie Wahrscheinlichkeitsverteilungen D_i über den Typmengen T_i, so dass $D_i(t_i)$ die A-Priori-Wahrscheinlichkeit ist, dass Spieler i den Typ t_i besitzt.

Definition 105 (Bayes-Nash-Gleichgewicht)**.** Eine Strategie von Spieler i ist eine Funktion $s_i : T_i \to X_i$. Ein Profil von Strategien $(s_1, \ldots, s_n)$ heißt **Bayes-Nash-Gleichgewicht**, falls für jeden Spieler i und jeden Typ t_i gilt, dass $s_i(t_i)$ eine beste Antwort auf s_{-i} ist, gegeben die Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Typen der anderen Spieler, d. h. für alle i, t_i und x'_i gilt $E_{D_{-i}}[u_i(t_i, s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}))] \geq E_{D_{-i}}[u_i(t_i, x'_i, s_{-i}(t_{-i}))]$.

Jedes Ex-Post-Nash-Gleichgewicht ist ein Bayes-Nash-Gleichgewicht (für jede mögliche Verteilung).

Literaturverzeichnis

[Bin92] Binmore, Ken: *Fun and Games.* D. C. Heath and Co., Lexington, MA, 1992.

[CS03] Conitzer, Vincent und Tuomas Sandholm: *Complexity Results about Nash Equilibria.* In: Gottlob, Georg und Toby Walsh (Herausgeber): *Proceedings of the Eighteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), Acapulco, Mexico*, Seiten 765–771. Morgan Kaufmann, 2003.

[FT91] Fudenberg, Drew und Jean Tirole: *Game Theory.* MIT Press, Cambridge, MA, 1991.

[Heu04] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis*, Band 2. Teubner, Stuttgart, dreizehnte Auflage, 2004.

[HI02] Holler, Manfred J. und Gerhard Illing: *Einführung in die Spieltheorie.* Springer-Verlag, Berlin, fünfte Auflage, 2002.

[NRTV07] Nisan, Noam, Tim Roughgarden, Éva Tardos und Vijay V. Vazirani (Herausgeber): *Algorithmic Game Theory.* Cambridge University Press, 2007.

[OR94] Osborne, Martin J. und Ariel Rubinstein: *A Course in Game Theory.* MIT Press, Cambridge, MA, 1994.

[Osb03] Osborne, Martin J.: *An Introduction to Game Theory.* Oxford University Press, 2003.

[RZ94] Rosenschein, Jeffrey S. und Gilad Zlotkin: *Rules of Encounter.* MIT Press, Cambridge, MA, 1994.

[vS02] von Stengel, Bernhard: *Computing Equilibria for Two-Person Games.* In: Aumann, Robert J. und Sergiu Hart (Herausgeber): *Handbook of Game Theory*, Band 3, Seiten 1723–1759. North-Holland, Amsterdam, 2002.

Index