Wissensrepräsentation

Prof. Dr. Nebel, Dr. Wölfl
M. Helmert, M. Ragni
WS 2005/2006

Universität Freiburg
Institut für Informatik

Projekt P2

Abgabe: Freitag, 27. Januar 2006

Abgabe per E-Mail an `helmert@informatik.uni-freiburg.de`

Dieses Projekt befasst sich mit ε-Konsequenzen einer Menge von konditionalen Aussagen. Zur Erinnerung:

> Sei K eine Menge von konditionalen Aussagen über einer Menge von Aussagevariablen V. Für $\delta > 0$ bezeichne $\mathcal{P}_\delta^K$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den Variablenbelegungen von V, unter denen $P(\beta'|\alpha') \geq 1 - \delta$ für alle konditionalen Aussagen $\alpha' \mathrel{|\!\sim} \beta' \in K$ gilt. (Dabei sei $P(\beta'|\alpha') := 1$, falls $P(\alpha') = 0$ gilt.)
>
> Eine konditionale Aussage $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$ ist eine ε-*Konsequenz* von K (in Symbolen: $K \models_\varepsilon \alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$) wenn gilt:
>
> Für alle $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P \in \mathcal{P}_\delta^K$ gilt: $P(\beta|\alpha) \geq 1 - \varepsilon$.

In diesem Projekt implementieren wir ein Programm, das für die Berechnung von ε-Konsequenzen verwendet werden kann. Anstelle einer vollständigen Implementation der Definition begnügen wir uns aber damit, für *feste* Werte ε und δ zu überprüfen, ob $P(\beta|\alpha) \geq 1 - \varepsilon$ für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P \in \mathcal{P}_\delta^K$ gilt. Wir sagen in diesem Fall, dass $\alpha \mathrel{|\!\sim} \beta$ für die gegebenen Werte ε und δ eine ε-δ-Konsequenz von K ist
Die Grundidee dabei ist folgende: Wir versuchen, einen Beweis durch Widerspruch zu führen, indem wir eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P \in \mathcal{P}_\delta^K$ mit der Eigenschaft $P(\beta|\alpha) < 1 - \varepsilon$ suchen. Dazu formalisieren wir die Eigenschaften, die eine solche Verteilung P haben muss, als lineares Programm (d. h. als Menge von linearen Ungleichungen) und verwenden ein Lösungsverfahren für lineare Programme, um eine geeignete Verteilung P zu finden oder zu beweisen, dass keine existiert.
Sei $\mathcal{I}(V)$ die Menge aller Variablenbelegungen $\mathcal{I} : V \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$. Wir repräsentieren eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathcal{I}(V)$ als Vektor von $2^{|V|}$ rellen Zahlen, wobei für alle $\mathcal{I} \in \mathcal{I}(V)$ die Zahl $p_\mathcal{I} \in [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeit für die Belegung $\mathcal{I}$ bezeichnet. Damit wir tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung erhalten, muss gelten:

$$p_\mathcal{I} \geq 0 \qquad \text{für alle } \mathcal{I} \in \mathcal{I}(V) \tag{1}$$

$$\sum_{\mathcal{I} \in \mathcal{I}(V)} p_\mathcal{I} = 1 \tag{2}$$

Als Lösungen kommen aber nicht beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Frage, sondern nur solche, die zu P_δ^K gehören, d. h. bei denen für alle Aussagen

$\alpha' \mathrel{|\!\!\sim} \beta' \in K$ gilt: $P(\beta'|\alpha') \geq 1-\delta$, oder äquivalent: $P(\alpha' \wedge \beta') \geq (1-\delta)P(\alpha')$. Als lineare Ungleichung formuliert erhalten wir also die Nebenbedingungen:

$$\sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{I}(V),\mathcal{I}\models\alpha'\wedge\beta'} p_{\mathcal{I}} \geq \sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{I}(V),\mathcal{I}\models\alpha'} (1-\delta)p_{\mathcal{I}} \qquad \text{für alle } \alpha' \mathrel{|\!\!\sim} \beta' \in K \tag{3}$$

Entsprechend erhalten wir für die Bedingung $P(\beta|\alpha) < 1-\varepsilon$ die Nebenbedingung:

$$\sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{I}(V),\mathcal{I}\models\alpha\wedge\beta} p_{\mathcal{I}} < \sum_{\mathcal{I}\in\mathcal{I}(V),\mathcal{I}\models\alpha} (1-\varepsilon)p_{\mathcal{I}}. \tag{4}$$

Es gilt also, dass das Ungleichungssystem (1)–(4) genau dann eine Lösung hat, wenn $\alpha \mathrel{|\!\!\sim} \beta$ *keine* ε-δ-Konsequenz von K ist.

Aufgabe P2.1 (ε-δ-Konsequenzen, 3 Punkte)

Implementieren Sie ein Programm zum Bestimmen von ε-δ-Konsequenzen. Verwenden Sie dabei das Programm `lp_solve` (siehe Übungsseite auf der Vorlesungshomepage), um das zugrunde liegende lineare Programm zu lösen.

Eingabe

Ihr Programm soll wie folgt ausgeführt werden:[1]

```
# consequence <eps> <delta> <k> ... <k> <c>
```

Dabei sind `eps` und `delta` Fließkommazahlen in üblicher Computernotation (z. B. `0.01`). Die restlichen Argumente sind bedingte Aussagen der Form $\alpha \mathrel{|\!\!\sim} \beta$, wobei die Argumente `k` die Menge K definieren und das Argument `c` die zu testende Konsequenz bezeichnet.
Bedingte Aussagen werden in der Form α`=>`β eingegeben, wobei α und β aussagenlogische Formeln sind, für die die Notation aus Projekt P1 verwendet wird.

Ausgabe

Die erste Zeile sollte je nach Ergebnis entweder „ε`-`δ`-consequence.`“ oder „`No` ε`-`δ`-consequence.`“ lauten, wobei für ε und δ die entsprechenden Eingabewerte eingesetzt werden. Falls die Antwort nein lautet, sollten die nachfolgenden Zeilen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben, die ein Gegenbeispiel darstellt, wobei jeweils eine Belegung pro Zeile ausgegeben wird.

Beispiel

Da im System **P** die Kontrapositionsregel nicht gilt, kann man einfach Gegenbeispiele zur Behauptung $\{a \mathrel{|\!\!\sim} b\} \models_\varepsilon \neg b \mathrel{|\!\!\sim} \neg a$ finden. Für die Eingabe

```
# consequence 0.5 0.1 "a=>b" "~b=>~a"
```

könnte die Ausgabe beispielsweise lauten:

```
No 0.5-0.1-consequence.
p(a=F, b=F) = 0.0000
p(a=F, b=T) = 0.0000
p(a=T, b=F) = 0.0100
p(a=T, b=T) = 0.9900
```

[1] Passen Sie die Kommandozeile entsprechend an, wenn Sie eine interpretierte Programmiersprache wie Java verwenden.