Spieltheorie

Bernhard Nebel, Ingo Thon, Robert Mattmüller,
Malte Helmert, Tim Schulte, Dominik Winterer

Vorlesungsskript

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Was ist Spieltheorie?

Spieltheorie ist die Analyse strategischer Entscheidungssituationen, in denen mehrere Spieler miteinander interagieren.

Dabei ist das Resultat eines Spiels von den Entscheidungen der Mitspieler abhängig und alle Spieler sind sich dessen bewusst. Damit stellt sich die Frage nach dem Ergebnis, das sich ergibt, falls alle Spieler „rational" handeln, d.h. ihren (erwarteten) Nutzen maximieren, wobei sie davon ausgehen, dass ihre Mitspieler ebenso rational handeln.

Ursprünglich ist die Spieltheorie ein Gebiet der theoretischen Wirtschaftswissenschaften, neuerdings jedoch auch für Künstliche Intelligenz und Informatik von Interesse, wenn es darum geht, dezentrale, heterogene Systeme von egoistischen Agenten zu modellieren. Während Lösungsbegriffe für Spiele bereits bekannt sind, sind noch viele algorithmische Fragen zu behandeln. Da die Annahme der Rationalität im Fall von künstlichen Agenten berechtigter ist als im Fall natürlicher Agenten, ist die Spieltheorie für die Informatik unter Umständen noch sinnvoller und interessanter als für die Wirtschaftswissenschaft.

Beispiel 1 (Anflugmanagement an Flughäfen)**.** Heute: First-come-first-served, besser wäre aber ein Anflugscheduling unter Berücksichtigung der verbleibenden Flugbenzinmengen der ankommenden Flugzeuge. Bei mehreren Fluglinien werden Online-Verhandlungen notwendig.

1.2 Gebiete der Spieltheorie

Zu den Gebieten der Spieltheorie gehören unter anderem sogenannte **strategische Spiele (Normalform-Spiele)**, bei denen die Strategien vor Beginn des Spiels festgelegt werden und das Spielergebnis aus der Strategiekombination resultiert.

Beispiel 2 (Gefangenendilemma)**.** Zwei Gefangene werden getrennt voneinander verhört und haben die Wahl, die ihnen vorgeworfene Tat zu gestehen und dabei den anderen Gefangenen zu belasten oder zu schweigen. Mögliche Ausgänge sind dann, dass

1. beide schweigen, worauf sie mit je drei Monaten Haft bestraft werden,
2. nur einer gesteht, der andere aber schweigt, woraufhin der Kronzeuge frei kommt, während der „Schweiger" zu zehn Jahren Haft verurteilt wird, oder dass
3. beide gestehen, was für beide eine dreijährige Haftstrafe bedeutet.

Daneben werden **extensive Spiele**, d.h. Spiele mit mehreren Zügen, wie etwa Schach oder wiederholte strategische Spiele, untersucht.

Es wird zwischen Spielen mit **vollständigen** und **unvollständigen Informationen** unterschieden, wobei etwa bei Kartenspielen den Spielern in der Regel nur unvollständige Informationen vorliegen.

Koalitions- oder Verhandlungsspiele modellieren Situationen wie Verhandlungen, Verteilungen von Gewinnen oder Wahlen.

In der **Implementierungstheorie (Mechanismusdesign)** betrachtet man Spiele nicht nur aus der Sicht der Spieler, sondern auch aus der eines „Spieledesigners“, der die Spielregeln so festlegen will, dass der Gesamtnutzen aller Spieler optimiert wird.

Die wichtigsten **Lösungskonzepte** der Spieltheorie sind die Elimination dominierter Strategien, Nash-Gleichgewichte und weitere Gleichgewichtsbegriffe.

2 Strategische Spiele

Definition 3 (Strategisches Spiel)**.** Ein **strategisches Spiel** $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ besteht aus

- einer endlichen **Spielermenge** N,
- für jeden Spieler $i \in N$ einer nichtleeren Menge A_i (von **Aktionen/Strategien**) und
- für jeden Spieler $i \in N$ einer **Auszahlungsfunktion** $u_i : A \to \mathbb{R}$, wobei

$$A = \prod_{i \in N} A_i.$$

G heißt endlich, falls A endlich ist.

Oft wird statt einer Auszahlungsfunktionen eine **Präferenzrelation** $\succeq_i$ für Spieler i genutzt:

$$a \succeq_i b \text{ gdw. } u_i(a) \geq u_i(b)$$

Endliche strategische Spiele werden oft in **Matrixform** angegeben, wie etwa das folgende Spiel mit zwei Spielern und je zwei möglichen Aktionen. Spieler 1 ist der Zeilenspieler, Spieler 2 der Spaltenspieler. Bei den Auszahlungen ist jeweils der erste Wert der Nutzen für Spieler 1, der zweite Wert der Nutzen für Spieler 2.

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	T	w_1, w_2	x_1, x_2
	B	y_1, y_2	z_1, z_2

Wählt Spieler 1 Aktion T und Spieler 2 Aktion L, dann erhält Spieler 1 die Auszahlung w_1, Spieler 2 erhält die Auszahlung w_2.

Beispiel 4 (Gefangenendilemma)**.** S sei die Strategie, zu schweigen, G die Strategie, zu gestehen. Die Auszahlungen sind in Gefängnismonaten angegeben.

	S	G
S	$-3, -3$	$-120, \quad 0$
G	$0, -120$	$-36, -36$

Beispiel 5 (Falke und Taube)**.** Die Spieler können sich in einem Kampf (etwa um Nahrung) wie ein Falke (F) oder wie eine Taube (T) verhalten. Treffen zwei Tauben aufeinander, teilen sie sich den Nutzen, trifft ein Falke auf eine Taube, gewinnt der Falke und sichert sich einen großen Teil des Nutzens, treffen aber zwei Falken aufeinander, so geht in dem Kampf der beiden der gesamte Nutzen verloren.

	T	F
T	$3,3$	$1,4$
F	$4,1$	$0,0$

Beispiel 6 (Matching Pennies)**.** Zwei Spieler wählen jeweils Kopf (K) oder Zahl (Z). Wählen beide das gleiche, gewinnt Spieler 1 einen Euro von Spieler 2, wählen sie etwas unterschiedliches, erhält Spieler 2 einen Euro von Spieler 1.

	K	Z
K	$1,-1$	$-1,\ \ 1$
Z	$-1,\ \ 1$	$1,-1$

Beispiel 7 (Bach oder Strawinsky)**.** Zwei Personen wollen gemeinsam ein Konzert besuchen, wobei eine der beiden Personen Bach bevorzugt, während die andere Strawinsky vorzieht. Beiden ist es wichtiger, in das gleiche Konzert zu gehen wie der Partner, als ihr Lieblingskonzert zu besuchen. Sei B die Aktion, das Bach-Konzert zu besuchen, S die Aktion, in das Strawinsky-Konzert zu gehen.

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	$2,1$	$0,0$
	S	$0,0$	$1,2$

2.1 Dominierte Strategien

Notation 8. Sei $a = (a_i)_{i\in N}$ ein **Strategieprofil** ($a \in A = \prod_{i\in N} A_i$). Dann ist $a_{-i} := (a_j)_{j\in N\setminus\{i\}}$ und $(a_{-i}, a_i) = (a_j)_{j\in(N\setminus\{i\})\cup\{i\}} = (a_j)_{j\in N} = a$.

Definition 9 (Strikt dominierte Strategie)**.** Eine Aktion $a_j^* \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$

heißt strikt dominiert, falls es eine Aktion $a'_j \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt:

$$u_j(a_{-j}, a'_j) > u_j(a_{-j}, a^*_j)$$

Bemerkung 10. Es ist nicht rational, strikt dominierte Strategien zu spielen.

2.1.1 Iterative Elimination strikt dominierter Strategien

- Streiche die Strategien, die strikt dominiert sind, solange welche da sind.
- Bleibt nur ein Profil übrig, ist das die Lösung.

Beispiel 11. Streiche zunächst die von der zweiten Zeile strikt dominierte erste Zeile, danach die von der zweiten Spalte strikt dominierte erste Spalte:

	S	G
S	~~3,3~~	~~0,4~~
G	4,0	1,1

	S	G
G	~~4,0~~	1,1

Beispiel 12. Iterative Elimination strikt dominierter Strategien in drei Schritten:

	L	R
T	2,1	0,0
M	1,2	2,1
B	~~0,0~~	~~1,1~~

	L	R
T	2,1	~~0,0~~
M	1,2	~~2,1~~

	L
T	2,1
M	~~1,2~~

Bemerkung 13. Nur in den seltensten Fällen existiert strikte Dominanz.

Bemerkung 14. Das Ergebnis der iterativen Elimination ist bei strikter Dominanz eindeutig (unabhängig von der Reihenfolge der Elimination).

Definition 15 (Schwach dominierte Strategien)**.** Eine Aktion $a^*_j \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ heißt schwach dominiert, falls es eine Aktion $a'_j \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$

$$u_j(a_{-j}, a'_j) \geq u_j(a_{-j}, a^*_j)$$

und für mindestens ein $a \in A$

$$u_j(a_{-j}, a'_j) > u_j(a_{-j}, a^*_j)$$

Beispiel 16. Das Ergebnis bei iterativer Elimination schwach dominierter Strategien ist im allgemeinen nicht eindeutig, sondern von der Eliminationsreihenfolge abhängig. Betrachte dazu folgendes Spiel:

	L	R
T	$2,1$	$0,0$
M	$2,1$	$1,1$
B	$0,0$	$1,1$

Eliminiert man zuerst T ($\leq$ M), dann L ($\leq R$), so hat jedes noch mögliche Ergebnis (MR oder BR) das Nutzenprofil $(1,1)$. Die alternative Reihenfolge, bei der zuerst B ($\leq$ M), dann R ($\leq L$) eliminiert wird, führt hingegen in beiden verbleibenden Strategieprofilen (TL und ML) zu dem Nutzenprofil $(2,1)$, das Spieler 1, durch dessen unterschiedliche Wahlmöglichkeiten bei der Eliminierung einer schwach dominierten Strategie die unterschiedlichen verbleibenden Strategieprofile überhaupt entstanden sind, einen höheren Nutzen bringt als die beiden im anderen Fall verbleibenden Strategieprofile MR und BR.

2.2 Nash-Gleichgewichte

Nash-Gleichgewichte sind das meistbenutzte Lösungskonzept der Spieltheorie. Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategiekombination, in der kein Spieler durch Abweichung einen Vorteil erlangen kann.

Beispiel 17. Nash-Gleichgewichte bei Bach oder Strawinsky:

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	$2,1$	$0,0$
	S	$0,0$	$1,2$

Hier existieren zwei Nashgleichgewichte, nämlich (B, B) und (S, S).

Definition 18 (Nash-Gleichgewicht)**.** Ein **Nash-Gleichgewicht (NG)** eines strategischen Spieles $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ ist ein Profil $a^* \in A$ von Aktionen mit der Eigenschaft, dass für alle Spieler $i \in N$ gilt:

$$u_i(a^*) = u_i(a^*_{-i}, a^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i) \qquad \text{für alle } a_i \in A_i.$$

Definition 19 (Nash-Gleichgewicht, alternativ)**.** Sei $B_i(a_{-i})$ die Menge von Aktionen $a_i \in A_i$, die eine beste Reaktion auf a_{-i} sind, d.h.

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \mid u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a'_i) \text{ für alle } a'_i \in A_i\}.$$

Ein Nash-Gleichgewicht a^* ist ein Profil mit der Eigenschaft

$$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*) \quad \text{für alle } i \in N.$$

Wir betrachten auch $B(a^*)$:

$$B(a^*) = \prod_{i \in N} B_i(a_{-i}^*)$$

Mit dieser Notation ist a^* ein Nash-Gleichgewicht gdw. $a^* \in B(a^*)$.

Beispiel 20. Im Gefangenendilemma gibt es genau ein Nash-Gleichgewicht:

	S	G
S	$3,3$	$0,4$
G	$4,0$	$\mathbf{1,1}$

Beispiel 21. Im Falke-und-Taube-Spiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte:

	Taube	Falke
Taube	$3,3$	$\mathbf{1,4}$
Falke	$\mathbf{4,1}$	$0,0$

Beispiel 22. Im Matching-Pennies-Spiel gibt es kein Nash-Gleichgewicht:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1,-1$	$-1,\ \ 1$
Zahl	$-1,\ \ 1$	$1,-1$

Beispiel 23 (Auktionsspiel)**.** Eine *Second Price Sealed Bid Auction* läuft wie folgt ab: Alle Auktionsteilnehmer geben ein geheimes Gebot für das zu versteigernde Objekt ab. Das höchste Gebot erhält den Zuschlag, wobei ein Betrag bezahlt werden muss, der dem *zweithöchsten* abgegebenen Gebot entspricht.

Formal ergibt sich folgendes Spiel $\langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$:

- $N = \{1, \ldots, n\}$, wobei $n \geq 2$. Wir schreiben $v_i \in \mathbb{R}$ für den *Wert* (in Euro), den Spieler i dem zu versteigernden Objekt zumisst. Das Auktionsspiel wird durch die Werte v_i parametrisiert. Wir fordern, dass $v_1 > v_2 > \cdots > v_n > 0$ gilt.
- Für alle $i \in N$ ist $A_i = \mathbb{R}^+$. Dabei entspricht $a_i \in A_i$ einem Gebot von a_i Euro.

- Die Nutzenfunktionen u_i sind wie folgt definiert: Erhält Spieler i den Zuschlag, so ist $u_i(a) = v_i - \max a_{-i}$. Der Spieler erhält das Objekt (Nutzen v_i), muss aber den höchsten von den anderen Spielern gebotenen Betrag bezahlen (Ausgabe $\max a_{-i}$). Wenn Spieler i den Zuschlag nicht erhält, dann ist $u_i(a) = 0$. Spieler i erhält in a den Zuschlag, wenn $a_i = \max a$ gilt und i die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Bei gleichen Geboten wird also der Spieler mit dem niedrigsten Index bevorzugt.

Eine schwach dominante Strategie für Spieler i besteht darin, v_i zu bieten. Für den Beweis der schwachen Dominanz ist zu zeigen, dass v_i eine beste Antwort auf alle Aktionsprofile a_{-i} der anderen Spieler ist und es zu jedem anderen Gebot a_i mindestens ein Profil a_{-i} gibt, auf das v_i eine echt bessere Antwort ist als a_i.

Für die zweite Eigenschaft sehen wir, dass v_i echt besser ist als $a_i \neq v_i$, wenn alle anderen Spieler $\frac{1}{2}(v_i + a_i)$ bieten.

Für die erste Eigenschaft unterscheiden wir zwei Fälle: Erhält Spieler i in $a = (a_{-i}, v_i)$ den Zuschlag, ergibt sich $v_i \geq \max a_{-i}$ und somit $u_i(a) = v_i - \max a_{-i} \geq 0$, also ein nichtnegativer Nutzen. Eine bessere Strategie gibt es nicht: Ohne den Zuschlag hätte i den Nutzen 0, und andere Strategien, die zum Zuschlag führen, bieten denselben Nutzen.

Erhält Spieler i in $a = (a_{-i}, v_i)$ nicht den Zuschlag, so ergibt sich ein Nutzen von 0. Wiederum geht es nicht besser: Andere Strategien, die nicht zum Zuschlag führen, haben den Nutzen 0, und Strategien, die zum Zuschlag führen, haben einen Nutzen von höchstens 0, da $\max a_{-i} \geq v_i$ ist (sonst hätte Spieler i bereits mit dem Gebot v_i den Zuschlag erhalten). Somit ist v_i in jedem Fall eine beste Antwort.

Ein Profil schwach dominanter Strategien a^* bildet stets ein Nash-Gleichgewicht: Da eine schwach dominante Strategie eine beste Antwort auf *alle* Strategieprofile ist, ist a_i^* insbesondere für jeden Spieler i eine beste Antwort auf a_{-i}^*.

2.2.1 Iterative Eliminierung und Nash-Gleichgewichte

Lemma 1. *Seien $G = \langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$ und $G' = \langle N, (A_i')_{i \in N}, (u_i')_{i \in N} \rangle$ strategische Spiele, so dass G' aus G durch Elimination* einer *strikt dominierten Strategie entsteht. Dann gilt: a^* ist ein Nash-Gleichgewicht von G genau dann, wenn a^* ein Nash-Gleichgewicht von G' ist.*

Beweis. Sei a_i die Strategie für Spieler i, die beim Übergang von G zu G' eliminiert wird. Es gibt also eine Strategie $a_i^+ \in A_i$, so dass $u_i(a_{-i}, a_i) < u_i(a_{-i}, a_i^+)$ für alle $a_{-i} \in A_{-i}$.

Sei zuerst a^* ein Nash-Gleichgewicht von G. Dann ist a_i^* eine beste Antwort auf a_{-i}^*, es gilt also $u_i(a^*) = u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a_i')$ für alle $a_i' \in A_i$, also insbesondere $u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$. Da aufgrund der strikten Dominanz $u_i(a_{-i}^*, a_i) < u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$ gilt, muss $a_i^* \neq a_i$ sein.

Die Gleichgewichtsstrategien a_j^* werden beim Übergang zu G' also nicht eliminiert. Für alle Spieler $j \in N$ ist a_j^* in G eine beste Antwort auf a_{-j}^*. Wegen $A_j' \subseteq A_j$ gilt dies dann natürlich auch in G'. Somit ist a^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G'.

Sei umgekehrt a'^* ein Nash-Gleichgewicht von G'. Zu zeigen ist, dass a'^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G ist. Da für alle Spieler j die Beziehung $A_j \supseteq A_j'$ gilt, ist dazu nur zu zeigen, dass $a_i'^*$ auch in G eine beste Antwort auf $a_{-i}'^*$ ist. Für Spieler $j \neq i$ muss $a_j'^*$

eine beste Antwort auf a'^*_{-j} sein, da $A_j = A'_j$ gilt und somit die Bedingungen für G und G' identisch sind.

Da $A_i = A'_i \cup \{a_i\}$ ist und a'^*_i unter den Strategien in A'_i eine beste Antwort auf a'^*_{-i} ist, müssen wir nur zeigen, dass a_i keine bessere Antwort ist. Dies folgt daraus, dass einerseits $u_i(a'^*) = u_i(a'^*_{-i}, a'^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a^+_i)$ (da a'^* ein Nash-Gleichgewicht in G' ist und $a^+_i \in A'_i$ ist) und andererseits $u_i(a'^*_{-i}, a_i) < u_i(a'^*_{-i}, a^+_i)$ (da a_i von a^+_i dominiert wird) gilt. Also ist a'^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G. □

Satz 2. *Wenn ein strategisches Spiel sich durch die Methode der iterativen Eliminierung strikt dominierter Strategien eindeutig lösen lässt, so ist das resultierende Strategieprofil ein Nash-Gleichgewicht, und zwar das einzige Nash-Gleichgewicht in diesem Spiel.*

Beweis. Mehrfache Anwendung von Lemma 1 (Induktion) ergibt, dass zwei Spiele G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, wenn G' aus G durch iterative Eliminierung entsteht.

Liefert nun das Verfahren der iterativen Eliminierung, ausgehend von G, das Spiel G' als eindeutige Lösung, so hat in G' jeder Spieler nur eine Strategie. Das einzig mögliche Strategieprofil in G' ist automatisch ein Nash-Gleichgewicht in G', und zwar das einzige. Da G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, folgt die Behauptung. □

Zusammenfassend lässt sich über die Existenz und Eindeutigkeit von Nash-Gleichgewichten folgendes sagen: Es gibt strategische Spiele, wie etwa Matching Pennies, in denen keine Nash-Gleichgewichte existieren. In endlichen strategischen Spielen gibt es jedoch immer mindestens ein Nash-Gleichgewicht, wenn wir zulassen, dass die Spieler ihre Strategien randomisieren. Nash-Gleichgewichte sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Sind die Auszahlungsfunktionen in Matrixform gegeben, so können Nash-Gleichgewichte einfach berechnet werden, für randomisierte Spiele ist das (vermutlich) nicht der Fall.

2.3 Strikt kompetitive Spiele und Maximin-Strategien

Definition 24 (Strikt kompetitive oder Nullsummenspiele)**.** Ein **strikt kompetitives Spiel** oder **Nullsummenspiel** ist ein strategisches Spiel $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ mit

$$u_1(a) = -u_2(a) \qquad \text{für alle } a \in A.$$

Beispiel 25. Matching Pennies:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1, -1$	$-1, \ \ 1$
Zahl	$-1, \ \ 1$	$1, -1$

Beispiel 26. Ein Spiel mit je drei Aktionen pro Spieler:

	L	M	R
T	$8, -8$	$3, -3$	$-6, \quad 6$
M	$2, -2$	$-1, \quad 1$	$3, -3$
B	$-6, \quad 6$	$4, -4$	$8, -8$

Es existiert kein Nash-Gleichgewicht. Versuche also, den eigenen Schaden zu minimieren.

Bestimme etwa für Spieler 1 Zeilenminimum des Nutzens, d.h. den Nutzen, den Spieler 1 sicher hat, wenn er die der Zeile entsprechende Aktion wählt, hier also $(-6; -1; -6)^t$. Also entscheidet sich der Rationale/Paranoide für M, wenn er über die Minima maximiert. Für Spieler 2 erhält man $(-8; -4; -8)$. Dieses Vorgehen ist für Paranoiker/Pessimisten in Ordnung, aber wenn man anfängt zu überlegen, dass der andere Spieler genau so denkt, ..., also kein Nash-Gleichgewicht. Aber angenommen es gibt ein Nash-Gleichgewicht, dann wird dieses mit Maximinimierer erreicht, wie wir gleich sehen werden.

Definition 27 (Maximinimierer)**.** Sei $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel. Eine Aktion $x^* \in A_1$ heißt **Maximinimierer (MM)** für Spieler 1 in G, falls

$$\min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) \geq \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \qquad \text{für alle } x \in A_1$$

und $y^* \in A_2$ heißt Maximinimierer für Spieler 2 in G falls

$$\min_{x \in A_1} u_2(x, y^*) \geq \min_{x \in A_1} u_2(x, y) \qquad \text{für alle } y \in A_2.$$

Bemerkung 28. Wenn ein Nash-Gleichgewicht in einem Nullsummenspiel existiert, so ist dies eine Kombination von Maximinimierern. (vgl. Satz 4 und Beweis dazu.)

Lemma 3. *Sei $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann gilt*

$$\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y) = - \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$$

Beweis. Es gilt für beliebiges reellwertiges f

$$\min_z(-f(z)) \quad = \quad -\max_z(f(z)). \tag{2.1}$$

Damit gilt für alle $y \in A_2$

$$\begin{aligned} -\min_{x \in A_1} u_2(x, y) &\overset{2.1}{=} \max_{x \in A_1}(-u_2(x, y)) \\ &= \max_{x \in A_1}(u_1(x, y)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Schließlich erhält man

$$\begin{aligned}\max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x,y) &\overset{2.1}{=} -\min_{y\in A_2} -[\min_{x\in A_1} u_2(x,y)]\\ &\overset{2.2}{=} -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y).\end{aligned}$$

□

Satz 4. *Sei $G = \langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann:*

1. *Falls (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist, dann sind x^* und y^* Maximinimierer für Spieler 1 bzw. Spieler 2.*
2. *Falls, (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht ist, dann gilt:*

$$\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) = u_1(x^*,y^*)$$

3. *Falls $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$ und x^* und y^* Maximinimierer von Spieler 1 bzw. Spieler 2 sind, dann ist (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. 1. Sei (x^*,y^*) ein Nash-Gleichgewicht. Nach der Definition von Nash-Gleichgewichten ist $u_2(x^*,y^*) \geq u_2(x^*,y)$ für alle $y \in A_2$. Wegen $u_1 = -u_2$ folgt $u_1(x^*,y^*) \leq u_1(x^*,y)$ für alle $y \in A_2$. Also

$$\begin{aligned}u_1(x^*,y^*) &= \min_{y\in A_2} u_1(x^*,y)\\ &\leq \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y) \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Außerdem gilt nach der Definition eines Nash-Gleichgewichtes aus der Perspektive von Spieler 1, dass $u_1(x^*,y^*) \geq u_1(x,y^*)$ für alle $x \in A_1$, also $u_1(x^*,y^*) \geq \min_{y\in A_2} u_1(x,y)$ für alle $x \in A_1$. Damit gilt auch $u_1(x^*,y^*) \geq \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y)$. Zusammen mit Ungleichung 2.3 folgt daraus

$$u_1(x^*,y^*) = \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y) \qquad (2.4)$$

Also ist x^* ein Maximinimierer.

Analog erhält man für Spieler 2, dass y^* ein Maximinimierer ist:

$$u_2(x^*,y^*) = \max_{y\in A_2}\min_{x\in A_1} u_2(x,y) \qquad (2.5)$$

2. Aus Gleichung 2.5 folgt mit Lemma 3, dass $u_2(x^*,y^*) = -\min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y)$ und daraus wegen $u_1 = -u_2$, dass $u_1(x^*,y^*) = \min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y)$. Zusammen mit Gleichung 2.4 erhält man

$$u_1(x^*,y^*) = \min_{y\in A_2}\max_{x\in A_1} u_1(x,y) = \max_{x\in A_1}\min_{y\in A_2} u_1(x,y).$$

Insbesondere folgt daraus, dass alle Nash-Gleichgewichte für alle Spieler denselben Nutzen haben.

3. Seien x^* und y^* Maximinimierer von Spieler 1 bzw. Spieler 2 und gelte $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) =: v^*$. Wegen Lemma 3 ist $-v^* = \max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x,y)$. Damit und da x^* und y^* Maximinimierer sind, gilt

$$u_1(x^*, y) \geq v^* \text{ für alle } y \in A_2 \text{ bzw.} \tag{2.6}$$

$$u_2(x, y^*) \geq -v^* \text{ für alle } x \in A_1 \tag{2.7}$$

   Insbesondere gilt für $x = x^*$ und $y = y^*$: $u_1(x^*, y^*) \geq v^*$ und $u_2(x^*, y^*) \geq -v^*$. Aus der letzten Ungleichung erhält man wegen $u_1 = -u_2$, dass $u_1(x^*, y^*) \leq v^*$, insgesamt also $u_1(x^*, y^*) = v^*$.

   Wegen Ungleichung 2.6 gilt $u_1(x^*, y) \geq u_1(x^*, y^*)$ für alle $y \in A_2$ bzw. wegen $u_1 = -u_2$ äquivalent $u_2(x^*, y) \leq u_2(x^*, y^*)$ für alle $y \in A_2$, d.h. y^* ist eine beste Antwort auf x^*.

   Analog erhält man wegen Ungleichung 2.7 $u_1(x, y^*) \leq u_1(x^*, y^*)$ für alle $x \in A_1$, d.h. auch x^* ist eine beste Antwort auf y^*. Damit ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.

Insgesamt folgt, dass man, wenn es mehrere Nash-Gleichgewichte gibt, sich immer ein beliebiges aussuchen kann, da alle den gleichen Nutzen liefern. □

Beachte, dass strikt kompetitive Spiele im Wesentlichen für Brettspiele interessant sind, jedoch nicht für die Wirtschaft.

Literaturverzeichnis

[Bin92] Binmore, Ken: *Fun and Games.* D. C. Heath and Co., Lexington, MA, 1992.

[CS03] Conitzer, Vincent und Tuomas Sandholm: *Complexity Results about Nash Equilibria.* In: Gottlob, Georg und Toby Walsh (Herausgeber): *Proceedings of the Eighteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), Acapulco, Mexico*, Seiten 765–771. Morgan Kaufmann, 2003.

[FT91] Fudenberg, Drew und Jean Tirole: *Game Theory.* MIT Press, Cambridge, MA, 1991.

[HI02] Holler, Manfred J. und Gerhard Illing: *Einführung in die Spieltheorie.* Springer-Verlag, Berlin, fünfte Auflage, 2002.

[NRTV07] Nisan, Noam, Tim Roughgarden, Éva Tardos und Vijay V. Vazirani (Herausgeber): *Algorithmic Game Theory.* Cambridge University Press, 2007.

[OR94] Osborne, Martin J. und Ariel Rubinstein: *A Course in Game Theory.* MIT Press, Cambridge, MA, 1994.

[Osb03] Osborne, Martin J.: *An Introduction to Game Theory.* Oxford University Press, 2003.

[RZ94] Rosenschein, Jeffrey S. und Gilad Zlotkin: *Rules of Encounter.* MIT Press, Cambridge, MA, 1994.

[vS02] von Stengel, Bernhard: *Computing Equilibria for Two-Person Games.* In: Aumann, Robert J. und Sergiu Hart (Herausgeber): *Handbook of Game Theory*, Band 3, Seiten 1723–1759. North-Holland, Amsterdam, 2002.