Spieltheorie

Prof. Dr. Bernhard Nebel

LaTeX-Umsetzung: Ingo Thon, Robert Mattmüller, Malte Helmert

{nebel, thon, mattmuel, helmert}@informatik.uni-freiburg.de

2004–2009

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Was ist Spieltheorie?

Spieltheorie ist die Analyse strategischer Entscheidungssituationen, in denen mehrere Spieler miteinander interagieren.

Dabei ist das Resultat eines Spiels von den Entscheidungen der Mitspieler abhängig und alle Spieler sind sich dessen bewusst. Damit stellt sich die Frage nach dem Ergebnis, das sich ergibt, falls alle Spieler „rational" handeln, d.h. ihren (erwarteten) Nutzen maximieren, wobei sie davon ausgehen, dass ihre Mitspieler ebenso rational handeln.

Ursprünglich ist die Spieltheorie ein Gebiet der theoretischen Wirtschaftswissenschaften, neuerdings jedoch auch für Künstliche Intelligenz und Informatik von Interesse, wenn es darum geht, dezentrale, heterogene Systeme von egoistischen Agenten zu modellieren. Während Lösungsbegriffe für Spiele bereits bekannt sind, sind noch viele algorithmische Fragen zu behandeln. Da die Annahme der Rationalität im Fall von künstlichen Agenten berechtigter ist als im Fall natürlicher Agenten, ist die Spieltheorie für die Informatik unter Umständen noch sinnvoller und interessanter als für die Wirtschaftswissenschaft.

Beispiel 1 (Anflugmanagement an Flughäfen)**.** Heute: First-come-first-served, besser wäre aber ein Anflugscheduling unter Berücksichtigung der verbleibenden Flugbenzinmengen der ankommenden Flugzeuge. Bei mehreren Fluglinien werden Online-Verhandlungen notwendig.

1.2 Gebiete der Spieltheorie

Zu den Gebieten der Spieltheorie gehören unter anderem sogenannte **strategische Spiele (Normalform-Spiele)**, bei denen die Strategien vor Beginn des Spiels festgelegt werden und das Spielergebnis aus der Strategiekombination resultiert.

Beispiel 2 (Gefangenendilemma)**.** Zwei Gefangene werden getrennt voneinander verhört und haben die Wahl, die ihnen vorgeworfene Tat zu gestehen und dabei den anderen Gefangenen zu belasten oder zu schweigen. Mögliche Ausgänge sind dann, dass

1. beide schweigen, worauf sie mit je drei Monaten Haft bestraft werden,
2. nur einer gesteht, der andere aber schweigt, woraufhin der Kronzeuge frei kommt, während der „Schweiger" zu zehn Jahren Haft verurteilt wird, oder dass
3. beide gestehen, was für beide eine dreijährige Haftstrafe bedeutet.

Daneben werden **extensive Spiele**, d.h. Spiele mit mehreren Zügen, wie etwa Schach oder wiederholte strategische Spiele, untersucht.

Es wird zwischen Spielen mit **vollständigen** und **unvollständigen Informationen** unterschieden, wobei etwa bei Kartenspielen den Spielern in der Regel nur unvollständige Informationen vorliegen.

Koalitions- oder Verhandlungsspiele modellieren Situationen wie Verhandlungen, Verteilungen von Gewinnen oder Wahlen.

In der **Implementierungstheorie (Mechanismusdesign)** betrachtet man Spiele nicht nur aus der Sicht der Spieler, sondern auch aus der eines „Spieledesigners", der die Spielregeln so festlegen will, dass der Gesamtnutzen aller Spieler optimiert wird.

Die wichtigsten **Lösungskonzepte** der Spieltheorie sind die Elimination dominierter Strategien, Nash-Gleichgewichte und weitere Gleichgewichtsbegriffe.

2 Strategische Spiele

Definition 3 (Strategisches Spiel)**.** Ein **strategisches Spiel** $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ besteht aus

- einer endlichen **Spielermenge** N,
- für jeden Spieler $i \in N$ einer nichtleeren Menge A_i (von **Aktionen/Strategien**) und
- für jeden Spieler $i \in N$ einer **Auszahlungsfunktion** $u_i : A \to \mathbb{R}$, wobei

$$A = \prod_{i \in N} A_i.$$

G heißt endlich, falls A endlich ist.

Oft wird statt einer Auszahlungsfunktionen eine **Präferenzrelation** $\succeq_i$ für Spieler i genutzt:

$$a \succeq_i b \text{ gdw. } u_i(a) \geq u_i(b)$$

Endliche strategische Spiele werden oft in **Matrixform** angegeben, wie etwa das folgende Spiel mit zwei Spielern und je zwei möglichen Aktionen. Spieler 1 ist der Zeilenspieler, Spieler 2 der Spaltenspieler. Bei den Auszahlungen ist jeweils der erste Wert der Nutzen für Spieler 1, der zweite Wert der Nutzen für Spieler 2.

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	T	w_1, w_2	x_1, x_2
	B	y_1, y_2	z_1, z_2

Wählt Spieler 1 Aktion T und Spieler 2 Aktion L, dann erhält Spieler 1 die Auszahlung w_1, Spieler 2 erhält die Auszahlung w_2.

Beispiel 4 (Gefangenendilemma)**.** S sei die Strategie, zu schweigen, G die Strategie, zu gestehen. Die Auszahlungen sind in Gefängnismonaten angegeben.

	S	G
S	$-3, -3$	$-120, \ 0$
G	$0, -120$	$-36, -36$

Beispiel 5 (Falke und Taube)**.** Die Spieler können sich in einem Kampf (etwa um Nahrung) wie ein Falke (F) oder wie eine Taube (T) verhalten. Treffen zwei Tauben aufeinander, teilen sie sich den Nutzen, trifft ein Falke auf eine Taube, gewinnt der Falke und sichert sich einen großen Teil des Nutzens, treffen aber zwei Falken aufeinander, so geht in dem Kampf der beiden der gesamte Nutzen verloren.

	T	F
T	$3,3$	$1,4$
F	$4,1$	$0,0$

Beispiel 6 (Matching Pennies)**.** Zwei Spieler wählen jeweils Kopf (K) oder Zahl (Z). Wählen beide das gleiche, gewinnt Spieler 1 einen Euro von Spieler 2, wählen sie etwas unterschiedliches, erhält Spieler 2 einen Euro von Spieler 1.

	K	Z
K	$1,-1$	$-1,\ \ 1$
Z	$-1,\ \ 1$	$1,-1$

Beispiel 7 (Bach oder Strawinsky)**.** Zwei Personen wollen gemeinsam ein Konzert besuchen, wobei eine der beiden Personen Bach bevorzugt, während die andere Strawinsky vorzieht. Beiden ist es wichtiger, in das gleiche Konzert zu gehen wie der Partner, als ihr Lieblingskonzert zu besuchen. Sei B die Aktion, das Bach-Konzert zu besuchen, S die Aktion, in das Strawinsky-Konzert zu gehen.

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	$2,1$	$0,0$
	S	$0,0$	$1,2$

2.1 Dominierte Strategien

Notation 8. Sei $a = (a_i)_{i \in N}$ ein **Strategieprofil** ($a \in A = \prod_{i \in N} A_i$). Dann ist $a_{-i} := (a_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$ und $(a_{-i}, a_i) = (a_j)_{j \in (N \setminus \{i\}) \cup \{i\}} = (a_j)_{j \in N} = a$.

Definition 9 (Strikt dominierte Strategie)**.** Eine Aktion $a_j^* \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt strikt dominiert, falls es eine Aktion $a_j' \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$ gilt:

$$u_j(a_{-j}, a_j') > u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

Bemerkung 10. Es ist nicht rational, strikt dominierte Strategien zu spielen.

2.1.1 Iterative Elimination strikt dominierter Strategien

- Streiche die Strategien, die strikt dominiert sind, solange welche da sind.
- Bleibt nur ein Profil übrig, ist das die Lösung.

Beispiel 11. Streiche zunächst die von der zweiten Zeile strikt dominierte erste Zeile, danach die von der zweiten Spalte strikt dominierte erste Spalte:

	S	G
S	~~3,3~~	~~0,4~~
G	4,0	1,1

	S	G
G	~~4,0~~	1,1

Beispiel 12. Iterative Elimination strikt dominierter Strategien in drei Schritten:

	L	R
T	2,1	0,0
M	1,2	2,1
B	~~0,0~~	~~1,1~~

	L	R
T	2,1	~~0,0~~
M	1,2	~~2,1~~

	L
T	2,1
M	~~1,2~~

Bemerkung 13. Nur in den seltensten Fällen existiert strikte Dominanz.

Bemerkung 14. Das Ergebnis der iterativen Elimination ist bei strikter Dominanz eindeutig (unabhängig von der Reihenfolge der Elimination).

Definition 15 (Schwach dominierte Strategien)**.** Eine Aktion $a_j^* \in A_j$ im Spiel $\langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt schwach dominiert, falls es eine Aktion $a_j' \in A_j$ gibt, so dass für alle $a \in A$

$$u_j(a_{-j}, a_j') \geq u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

und für mindestens ein $a \in A$

$$u_j(a_{-j}, a_j') > u_j(a_{-j}, a_j^*)$$

Beispiel 16. Das Ergebnis bei iterativer Elimination schwach dominierter Strategien ist im allgemeinen nicht eindeutig, sondern von der Eliminationsreihenfolge abhängig. Betrachte dazu folgendes Spiel:

	L	R
T	$2,1$	$0,0$
M	$2,1$	$1,1$
B	$0,0$	$1,1$

Eliminiert man zuerst T ($\leq$ M), dann L ($\leq R$), so hat jedes noch mögliche Ergebnis (MR oder BR) das Nutzenprofil $(1,1)$. Die alternative Reihenfolge, bei der zuerst B ($\leq$ M), dann R ($\leq L$) eliminiert wird, führt hingegen in beiden verbleibenden Strategieprofilen (TL und ML) zu dem Nutzenprofil $(2,1)$, das Spieler 1, durch dessen unterschiedliche Wahlmöglichkeiten bei der Eliminierung einer schwach dominierten Strategie die unterschiedlichen verbleibenden Strategieprofile überhaupt entstanden sind, einen höheren Nutzen bringt als die beiden im anderen Fall verbleibenden Strategieprofile MR und BR.

2.2 Nash-Gleichgewichte

Nash-Gleichgewichte sind das meistbenutzte Lösungskonzept der Spieltheorie. Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Strategiekombination, in der kein Spieler durch Abweichung einen Vorteil erlangen kann.

Beispiel 17. Nash-Gleichgewichte bei Bach oder Strawinsky:

		Strawinsky-Fan: B	Strawinsky-Fan: S
Bach-Fan	B	$2,1$	$0,0$
	S	$0,0$	$1,2$

Hier existieren zwei Nashgleichgewichte, nämlich (B, B) und (S, S).

Definition 18 (Nash-Gleichgewicht)**.** Ein **Nash-Gleichgewicht (NG)** eines strategischen Spieles $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ist ein Profil $a^* \in A$ von Aktionen mit der Eigenschaft, dass für alle Spieler $i \in N$ gilt:

$$u_i(a^*) = u_i(a^*_{-i}, a^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i) \qquad \text{für alle } a_i \in A_i.$$

Definition 19 (Nash-Gleichgewicht, alternativ)**.** Sei $B_i(a_{-i})$ die Menge von Aktionen $a_i \in A_i$, die eine beste Reaktion auf a_{-i} sind, d.h.

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i \mid u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a'_i) \text{ für alle } a'_i \in A_i\}\,.$$

Ein Nash-Gleichgewicht a^* ist ein Profil mit der Eigenschaft

$$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*) \quad \text{für alle } i \in N.$$

Wir betrachten auch $B(a^*)$:

$$B(a^*) = \prod_{i \in N} B_i(a_{-i}^*)$$

Mit dieser Notation ist a^* ein Nash-Gleichgewicht gdw. $a^* \in B(a^*)$.

Beispiel 20. Im Gefangenendilemma gibt es genau ein Nash-Gleichgewicht:

	S	G
S	$3, 3$	$0, 4$
G	$4, 0$	$\mathbf{1, 1}$

Beispiel 21. Im Falke-und-Taube-Spiel gibt es zwei Nash-Gleichgewichte:

	Taube	Falke
Taube	$3, 3$	$\mathbf{1, 4}$
Falke	$\mathbf{4, 1}$	$0, 0$

Beispiel 22. Im Matching-Pennies-Spiel gibt es kein Nash-Gleichgewicht:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1, -1$	$-1, \ \ 1$
Zahl	$-1, \ \ 1$	$1, -1$

Beispiel 23 (Auktionsspiel)**.** Eine *Second Price Sealed Bid Auction* läuft wie folgt ab: Alle Auktionsteilnehmer geben ein geheimes Gebot für das zu versteigernde Objekt ab. Das höchste Gebot erhält den Zuschlag, wobei ein Betrag bezahlt werden muss, der dem *zweithöchsten* abgegebenen Gebot entspricht.

Formal ergibt sich folgendes Spiel $\langle N, (A_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N} \rangle$:

- $N = \{ 1, \ldots, n \}$, wobei $n \geq 2$. Wir schreiben $v_i \in \mathbb{R}$ für den *Wert* (in Euro), den Spieler i dem zu versteigernden Objekt zumisst. Das Auktionsspiel wird durch die Werte v_i parametrisiert. Wir fordern, dass $v_1 > v_2 > \cdots > v_n > 0$ gilt.
- Für alle $i \in N$ ist $A_i = \mathbb{R}^+$. Dabei entspricht $a_i \in A_i$ einem Gebot von a_i Euro.

- Die Nutzenfunktionen u_i sind wie folgt definiert: Erhält Spieler i den Zuschlag, so ist $u_i(a) = v_i - \max a_{-i}$. Der Spieler erhält das Objekt (Nutzen v_i), muss aber den höchsten von den anderen Spielern gebotenen Betrag bezahlen (Ausgabe $\max a_{-i}$). Wenn Spieler i den Zuschlag nicht erhält, dann ist $u_i(a) = 0$. Spieler i erhält in a den Zuschlag, wenn $a_i = \max a$ gilt und i die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Bei gleichen Geboten wird also der Spieler mit dem niedrigsten Index bevorzugt.

Eine schwach dominante Strategie für Spieler i besteht darin, v_i zu bieten. Für den Beweis der schwachen Dominanz ist zu zeigen, dass v_i eine beste Antwort auf alle Aktionsprofile a_{-i} der anderen Spieler ist und es zu jedem anderen Gebot a_i mindestens ein Profil a_{-i} gibt, auf das v_i eine echt bessere Antwort ist als a_i.

Für die zweite Eigenschaft sehen wir, dass v_i echt besser ist als $a_i \neq v_i$, wenn alle anderen Spieler $\frac{1}{2}(v_i + a_i)$ bieten.

Für die erste Eigenschaft unterscheiden wir zwei Fälle: Erhält Spieler i in $a = (a_{-i}, v_i)$ den Zuschlag, ergibt sich $v_i \geq \max a_{-i}$ und somit $u_i(a) = v_i - \max a_{-i} \geq 0$, also ein nichtnegativer Nutzen. Eine bessere Strategie gibt es nicht: Ohne den Zuschlag hätte i den Nutzen 0, und andere Strategien, die zum Zuschlag führen, bieten denselben Nutzen.

Erhält Spieler i in $a = (a_{-i}, v_i)$ nicht den Zuschlag, so ergibt sich ein Nutzen von 0. Wiederum geht es nicht besser: Andere Strategien, die nicht zum Zuschlag führen, haben den Nutzen 0, und Strategien, die zum Zuschlag führen, haben einen Nutzen von höchstens 0, da $\max a_{-i} \geq v_i$ ist (sonst hätte Spieler i bereits mit dem Gebot v_i den Zuschlag erhalten). Somit ist v_i in jedem Fall eine beste Antwort.

Ein Profil schwach dominanter Strategien a^* bildet stets ein Nash-Gleichgewicht: Da eine schwach dominante Strategie eine beste Antwort auf *alle* Strategieprofile ist, ist a_i^* insbesondere für jeden Spieler i eine beste Antwort auf a_{-i}^*.

2.2.1 Iterative Eliminierung und Nash-Gleichgewichte

Lemma 1. *Seien $G = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$ und $G' = \langle N, (A'_i)_{i\in N}, (u'_i)_{i\in N}\rangle$ strategische Spiele, so dass G' aus G durch Elimination* einer *strikt dominierten Strategie entsteht. Dann gilt: a^* ist ein Nash-Gleichgewicht von G genau dann, wenn a^* ein Nash-Gleichgewicht von G' ist.*

Beweis. Sei a_i die Strategie für Spieler i, die beim Übergang von G zu G' eliminiert wird. Es gibt also eine Strategie $a_i^+ \in A_i$, so dass $u_i(a_{-i}, a_i) < u_i(a_{-i}, a_i^+)$ für alle $a_{-i} \in A_{-i}$.

Sei zuerst a^* ein Nash-Gleichgewicht von G. Dann ist a_i^* eine beste Antwort auf a_{-i}^*, es gilt also $u_i(a^*) = u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a'_i)$ für alle $a'_i \in A_i$, also insbesondere $u_i(a_{-i}^*, a_i^*) \geq u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$. Da aufgrund der strikten Dominanz $u_i(a_{-i}^*, a_i) < u_i(a_{-i}^*, a_i^+)$ gilt, muss $a_i^* \neq a_i$ sein.

Die Gleichgewichtsstrategien a_j^* werden beim Übergang zu G' also nicht eliminiert. Für alle Spieler $j \in N$ ist a_j^* in G eine beste Antwort auf a_{-j}^*. Wegen $A'_j \subseteq A_j$ gilt dies dann natürlich auch in G'. Somit ist a^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G'.

Sei umgekehrt a'^* ein Nash-Gleichgewicht von G'. Zu zeigen ist, dass a'^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G ist. Da für alle Spieler j die Beziehung $A_j \supseteq A'_j$ gilt, ist dazu nur zu zeigen, dass $a_i'^*$ auch in G eine beste Antwort auf $a_{-i}'^*$ ist. Für Spieler $j \neq i$ muss $a_j'^*$

eine beste Antwort auf a'^*_{-j} sein, da $A_j = A'_j$ gilt und somit die Bedingungen für G und G' identisch sind.

Da $A_i = A'_i \cup \{a_i\}$ ist und a'^*_i unter den Strategien in A'_i eine beste Antwort auf a'^*_{-i} ist, müssen wir nur zeigen, dass a_i keine bessere Antwort ist. Dies folgt daraus, dass einerseits $u_i(a'^*) = u_i(a'^*_{-i}, a'^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a^+_i)$ (da a'^* ein Nash-Gleichgewicht in G' ist und $a^+_i \in A'_i$ ist) und andererseits $u_i(a'^*_{-i}, a_i) < u_i(a'^*_{-i}, a^+_i)$ (da a_i von a^+_i dominiert wird) gilt. Also ist a'^* auch ein Nash-Gleichgewicht von G. □

Satz 2. *Wenn ein strategisches Spiel sich durch die Methode der iterativen Eliminierung strikt dominierter Strategien eindeutig lösen lässt, so ist das resultierende Strategieprofil ein Nash-Gleichgewicht, und zwar das einzige Nash-Gleichgewicht in diesem Spiel.*

Beweis. Mehrfache Anwendung von Lemma 1 (Induktion) ergibt, dass zwei Spiele G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, wenn G' aus G durch iterative Eliminierung entsteht.

Liefert nun das Verfahren der iterativen Eliminierung, ausgehend von G, das Spiel G' als eindeutige Lösung, so hat in G' jeder Spieler nur eine Strategie. Das einzig mögliche Strategieprofil in G' ist automatisch ein Nash-Gleichgewicht in G', und zwar das einzige. Da G und G' dieselben Nash-Gleichgewichte besitzen, folgt die Behauptung. □

Zusammenfassend lässt sich über die Existenz und Eindeutigkeit von Nash-Gleichgewichten folgendes sagen: Es gibt strategische Spiele, wie etwa Matching Pennies, in denen keine Nash-Gleichgewichte existieren. In endlichen strategischen Spielen gibt es jedoch immer mindestens ein Nash-Gleichgewicht, wenn wir zulassen, dass die Spieler ihre Strategien randomisieren. Nash-Gleichgewichte sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Sind die Auszahlungsfunktionen in Matrixform gegeben, so können Nash-Gleichgewichte einfach berechnet werden, für randomisierte Spiele ist das (vermutlich) nicht der Fall.

2.3 Strikt kompetitive Spiele und Maximin-Strategien

Definition 24 (Strikt kompetitive oder Nullsummenspiele)**.** Ein **strikt kompetitives Spiel** oder **Nullsummenspiel** ist ein strategisches Spiel $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ mit

$$u_1(a) = -u_2(a) \qquad \text{für alle } a \in A.$$

Beispiel 25. Matching Pennies:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1, -1$	$-1, \ \ 1$
Zahl	$-1, \ \ 1$	$1, -1$

Beispiel 26. Ein Spiel mit je drei Aktionen pro Spieler:

	L	M	R
T	$8, -8$	$3, -3$	$-6, \quad 6$
M	$2, -2$	$-1, \quad 1$	$3, -3$
B	$-6, \quad 6$	$4, -4$	$8, -8$

Es existiert kein Nash-Gleichgewicht. Versuche also, den eigenen Schaden zu minimieren.

Bestimme etwa für Spieler 1 Zeilenminimum des Nutzens, d.h. den Nutzen, den Spieler 1 sicher hat, wenn er die der Zeile entsprechende Aktion wählt, hier also $(-6; -1; -6)^t$. Also entscheidet sich der Rationale/Paranoide für M, wenn er über die Minima maximiert. Für Spieler 2 erhält man $(-8; -4; -8)$. Dieses Vorgehen ist für Paranoiker/Pessimisten in Ordnung, aber wenn man anfängt zu überlegen, dass der andere Spieler genau so denkt, ..., also kein Nash-Gleichgewicht. Aber angenommen es gibt ein Nash-Gleichgewicht, dann wird dieses mit Maximinimierer erreicht, wie wir gleich sehen werden.

Definition 27 (Maximinimierer)**.** Sei $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel. Eine Aktion $x^* \in A_1$ heißt **Maximinimierer (MM)** für Spieler 1 in G, falls

$$\min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) \geq \min_{y \in A_2} u_1(x, y) \qquad \text{für alle } x \in A_1$$

und $y^* \in A_2$ heißt Maximinimierer für Spieler 2 in G falls

$$\min_{x \in A_1} u_2(x, y^*) \geq \min_{x \in A_1} u_2(x, y) \qquad \text{für alle } y \in A_2.$$

Bemerkung 28. Wenn ein Nash-Gleichgewicht in einem Nullsummenspiel existiert, so ist dies eine Kombination von Maximinimierern. (vgl. Satz 4 und Beweis dazu.)

Lemma 3. *Sei $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i)\rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann gilt*

$$\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x, y) = - \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x, y)$$

Beweis. Es gilt für beliebiges reellwertiges f

$$\min_z(-f(z)) \quad = \quad -\max_z(f(z)). \tag{2.1}$$

Damit gilt für alle $y \in A_2$

$$\begin{aligned} -\min_{x \in A_1} u_2(x, y) &\overset{2.1}{=} \max_{x \in A_1}(-u_2(x, y)) \\ &= \max_{x \in A_1}(u_1(x, y)). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Schließlich erhält man

$$\begin{aligned}\max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x,y) &\overset{2.1}{=} -\min_{y \in A_2} -[\min_{x \in A_1} u_2(x,y)] \\ &\overset{2.2}{=} -\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x,y).\end{aligned}$$

□

Satz 4. *Sei $G = \langle \{1,2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ ein Nullsummenspiel. Dann:*

1. *Falls (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist, dann sind x^* und y^* Maximinimierer für Spieler 1 bzw. Spieler 2.*
2. *Falls, (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht ist, dann gilt:*

$$\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) = u_1(x^*, y^*)$$

3. *Falls $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$ und x^* und y^* Maximinimierer von Spieler 1 bzw. Spieler 2 sind, dann ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.*

Beweis. 1. Sei (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht. Nach der Definition von Nash-Gleichgewichten ist $u_2(x^*, y^*) \geq u_2(x^*, y)$ für alle $y \in A_2$. Wegen $u_1 = -u_2$ folgt $u_1(x^*, y^*) \leq u_1(x^*, y)$ für alle $y \in A_2$. Also

$$\begin{aligned}u_1(x^*, y^*) &= \min_{y \in A_2} u_1(x^*, y) \\ &\leq \max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x,y) \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Außerdem gilt nach der Definition eines Nash-Gleichgewichtes aus der Perspektive von Spieler 1, dass $u_1(x^*, y^*) \geq u_1(x, y^*)$ für alle $x \in A_1$, also $u_1(x^*, y^*) \geq \min_{y \in A_2} u_1(x,y)$ für alle $x \in A_1$. Damit gilt auch $u_1(x^*, y^*) \geq \max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x,y)$. Zusammen mit Ungleichung 2.3 folgt daraus

$$u_1(x^*, y^*) = \max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x,y) \qquad (2.4)$$

Also ist x^* ein Maximinimierer.

Analog erhält man für Spieler 2, dass y^* ein Maximinimierer ist:

$$u_2(x^*, y^*) = \max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x,y) \qquad (2.5)$$

2. Aus Gleichung 2.5 folgt mit Lemma 3, dass $u_2(x^*, y^*) = -\min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x,y)$ und daraus wegen $u_1 = -u_2$, dass $u_1(x^*, y^*) = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x,y)$. Zusammen mit Gleichung 2.4 erhält man

$$u_1(x^*, y^*) = \min_{y \in A_2} \max_{x \in A_1} u_1(x,y) = \max_{x \in A_1} \min_{y \in A_2} u_1(x,y).$$

Insbesondere folgt daraus, dass alle Nash-Gleichgewichte für alle Spieler denselben Nutzen haben.

3. Seien x^* und y^* Maximinimierer von Spieler 1 bzw. Spieler 2 und gelte $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y) =: v^*$. Wegen Lemma 3 ist $-v^* = \max_{y \in A_2} \min_{x \in A_1} u_2(x,y)$. Damit und da x^* und y^* Maximinimierer sind, gilt

$$u_1(x^*, y) \geq v^* \text{ für alle } y \in A_2 \text{ bzw.} \tag{2.6}$$

$$u_2(x, y^*) \geq -v^* \text{ für alle } x \in A_1 \tag{2.7}$$

   Insbesondere gilt für $x = x^*$ und $y = y^*$: $u_1(x^*, y^*) \geq v^*$ und $u_2(x^*, y^*) \geq -v^*$. Aus der letzten Ungleichung erhält man wegen $u_1 = -u_2$, dass $u_1(x^*, y^*) \leq v^*$, insgesamt also $u_1(x^*, y^*) = v^*$.

   Wegen Ungleichung 2.6 gilt $u_1(x^*, y) \geq u_1(x^*, y^*)$ für alle $y \in A_2$ bzw. wegen $u_1 = -u_2$ äquivalent $u_2(x^*, y) \leq u_2(x^*, y^*)$ für alle $y \in A_2$, d.h. y^* ist eine beste Antwort auf x^*.

   Analog erhält man wegen Ungleichung 2.7 $u_1(x, y^*) \leq u_1(x^*, y^*)$ für alle $x \in A_1$, d.h. auch x^* ist eine beste Antwort auf y^*. Damit ist (x^*, y^*) ein Nash-Gleichgewicht.

Insgesamt folgt, dass man, wenn es mehrere Nash-Gleichgewichte gibt, sich immer ein beliebiges aussuchen kann, da alle den gleichen Nutzen liefern. □

Beachte, dass strikt kompetitive Spiele im Wesentlichen für Brettspiele interessant sind, jedoch nicht für die Wirtschaft.

3 Gemischte Strategien

3.1 Überblick

Im letzten Kapitel hat sich gezeigt, dass nicht in jedem Spiel ein Nash-Gleichgewicht existieren muss (vgl. etwa Matching-Pennies-Spiel). Was kann man in solchen Situationen tun? Idee: randomisierte Strategien.

Definition 29 (Gemischte Strategie)**.** Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ ein strategisches Spiel, so dass alle A_i höchstens abzählbar und alle u_i beschränkt sind.

Sei $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über der Menge A_i. Ein $\alpha_i \in \Delta(A_i)$ ist eine **gemischte Strategie** in G, $\alpha_i(a_i)$ die Wahrscheinlichkeit für die Wahl von $a_i \in A_i$.

Ein Profil $(\alpha_i)_{i \in N} \in \prod_{i \in N} \Delta(A_i)$ induziert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $A = \prod_{i \in N} A_i$ durch

$$p(a) := \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i).$$

Für $A' \subseteq A$ sei

$$p(A') := \sum_{a \in A'} p(a) = \sum_{a \in A'} \prod_{i \in N} \alpha_i(a_i).$$

Beispiel 30. Gemischte Strategie im Matching-Pennies-Spiel:

	Kopf	Zahl
Kopf	$1, -1$	$-1, \; 1$
Zahl	$-1, \; 1$	$1, -1$

Für Spieler 1 betrachte die gemischte Strategie $\alpha_1 \in \Delta(\{K, Z\})$ mit

$$\alpha_1(K) = \frac{2}{3} \text{ und } \alpha_1(Z) = \frac{1}{3}.$$

Für Spieler 2 betrachte die gemischte Strategie $\alpha_2 \in \Delta(\{K, Z\})$ mit

$$\alpha_2(K) = \frac{1}{3} \text{ und } \alpha_2(Z) = \frac{2}{3}.$$

Die induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{ K, Z \}^2$ ist

$$
\begin{aligned}
p(K,K) &= \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(K) = \frac{2}{9} & u_1(K,K) &= +1\\
p(K,Z) &= \alpha_1(K) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{4}{9} & u_1(K,Z) &= -1\\
p(Z,K) &= \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(K) = \frac{1}{9} & u_1(Z,K) &= -1\\
p(Z,Z) &= \alpha_1(Z) \cdot \alpha_2(Z) = \frac{2}{9} & u_1(Z,Z) &= +1.
\end{aligned}
$$

Definition 31 (Erwarteter Nutzen)**.** Sei $\alpha \in \prod_{i\in N} \Delta(A_i)$. Der **erwartete Nutzen** von α für Spieler i ist definiert als

$$U_i(\alpha) = U_i((\alpha_j)_{j\in N}) := \sum_{a\in A} \underbrace{\left(\prod_{j\in N} \alpha_j(a_j) \right)}_{=p(a)} u_i(a).$$

Beispiel 32. In Beispiel 30 sind der erwartete Nutzen für Spieler 1 und Spieler 2

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{9} \text{ und } U_2(\alpha_1, \alpha_2) = +\frac{1}{9}.$$

Definition 33 (Unterstützungsmenge)**.** Sei α_i eine gemischte Strategie. Die **Unterstützungsmenge** (**support**) von α_i ist die Menge

$$supp(\alpha_i) = \{ a_i \in A_i \mid \alpha_i(a_i) > 0 \}.$$

Definition 34 (Gemischte Erweiterung)**.** Die **gemischte Erweiterung** eines strategischen Spiels $\langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ist das Spiel $\langle N, (\Delta(A_i)), (U_i)\rangle$, in dem $\Delta(A_i)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen über den Aktionen A_i ist und $U_i : \prod_{j\in N} \Delta(A_j) \to \mathbb{R}$ jedem $\alpha \in \prod_{j\in N} \Delta(A_j)$ den erwarteten Nutzen für Spieler i unter der von α induzierten Wahrscheinlichkeitsverteilung zuordnet.

Definition 35 (Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien)**.** Sei G ein strategisches Spiel. Ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien** von G ist ein Nash-Gleichgewicht der gemischten Erweiterung von G.

Satz 5 (Satz von Nash)**.** *Jedes endliche strategische Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien.*

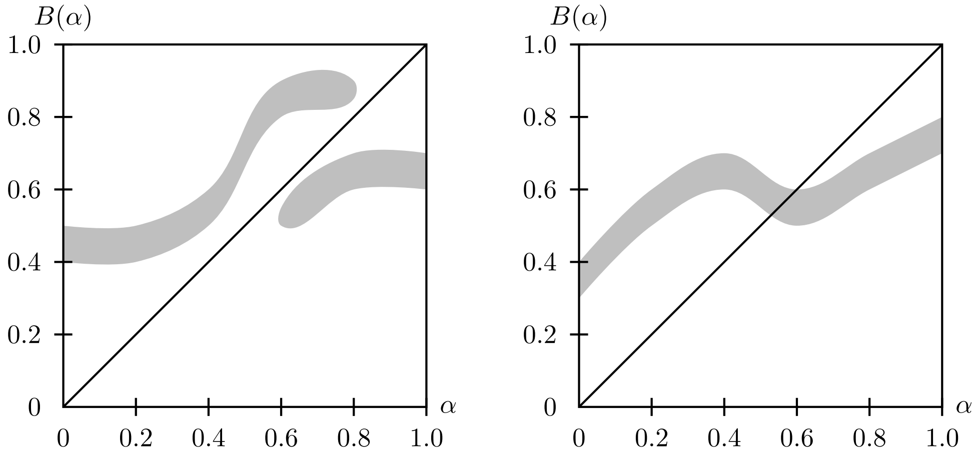
Beweisskizze. Betrachte die mengenwertige Funktion (Korrespondenz) der besten Antworten $B : \mathbb{R}^{\sum_i |A_i|} \to \mathrm{Pot}(\mathbb{R}^{\sum_i |A_i|})$ mit

$$B(\alpha) = \prod_{i\in N} B_i(\alpha_{-i}).$$

Ein gemischtes Strategieprofil α ist Fixpunkt der Korrespondenz B gdw. $\alpha \in B(\alpha)$ gdw. α ein Nash-Gleichgewicht ist.

Der Graph der Korrespondenz sollte zusammenhängend sein. Dann liegen Punkte auf der Fixpunktdiagonalen. □

In der ersten der beiden folgenden Abbildungen ist der Graph der Korrespondenz nicht zusammenhängend und es liegen keine Punkte auf der Fixpunktdiagonalen. Der zweite Graph ist dagegen zusammenhängend und die Korrespondenz besitzt Fixpunkte.



Definition 36. Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn sie

1. beschränkt ist, d.h. es in jeder Dimension obere und untere Schranken gibt und
2. abgeschlossen ist, d.h. wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge von Elementen aus X selbst in X liegt.

Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn für alle $x, y \in X$ und beliebiges $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in X.$$

Eine Korrespondenz $f : X \to \mathrm{Pot}(X)$ heißt **ober-hemi-stetig**, falls ihr Graph

$$\mathrm{Graph}(f) = \{ (x, y) \mid x \in X,\ y \in f(x) \}$$

eine abgeschlossene Menge ist.

Satz 6 (Fixpunktsatz von Kakutani)**.** *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, kompakte und konvexe Menge und sei außerdem $f : X \to \mathrm{Pot}(X)$ eine ober-hemi-stetige Korrespondenz, so dass für jedes $x \in X$ die Menge $f(x) \subseteq X$ nicht-leer und konvex ist. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in X$ mit $x \in f(x)$.*

Beweis. vgl. z. B. [Heu04, Abschnitt 232]. □

Beweis des Satzes von Nash. Zeige, dass der Fixpunktsatz von Kakutani mit $\prod_i \Delta(A_i)$ für X und B für f anwendbar ist.

1. $\prod_i \Delta(A_i)$ ist nicht-leer, konvex und kompakt: Ein Profil von gemischten Strategien zu G ist durch $M := \sum_{i \in N} |A_i|$ nicht-negative reelle Zahlen gegeben, so dass sich die Zahlen, die den Aktionen eines Spielers entsprechen, zu 1 addieren.

   Wir interpretieren die Menge der gemischten Strategieprofile für G, symbolisch $\mathcal{A} := \prod_{i \in N} \Delta(A_i)$, als Teilmenge des $\mathbb{R}^M$. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ nicht-leer, kompakt und konvex ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Spieler mit natürlichen Zahlen bezeichnet, d. h. $N = \{1, \ldots, n\}$.

$\mathcal{A}$ ist nicht-leer, da $\mathcal{A}$ z. B. das Tupel $(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{|A_1|-1 \text{ mal}}, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{|A_n|-1 \text{ mal}})$ enthält.

$\mathcal{A}$ ist beschränkt, da keines der Elemente negativ oder größer als 1 sein kann. $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen, denn wenn in einer konvergenten Folge von Elementen von $\mathcal{A}$ alle Elemente der Folge nicht-negativ und durch 1 beschränkt sind und sich die zu einem Spieler gehörenden Wahrscheinlichkeiten zu 1 addieren, dann muss dies auch für den Grenzwert gelten. Ansonsten enthält man unmittelbar einen Widerspruch dazu, dass Grenzwerte Häufungspunkte sein müssen. Da $\mathcal{A}$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist $\mathcal{A}$ kompakt.

Seien schließlich $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ und $t \in [0, 1]$. Betrachte $\gamma = t\alpha + (1-t)\beta$. Es gilt: $\min \gamma = \min(t\alpha + (1-t)\beta) \geq t \min \alpha + (1-t) \min \beta \geq t \cdot 0 + (1-t) \cdot 0 = 0$, und analog $\max \gamma \leq 1$.

Seien $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ und $\tilde{\gamma}$ die Abschnitte von α, β und γ, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung für Spieler i bestimmen. Dann gilt $\sum \tilde{\gamma} = \sum(t\tilde{\alpha} + (1-t)\tilde{\beta}) = t \sum \tilde{\alpha} + (1-t) \sum \tilde{\beta} = t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1$. Also summieren sich die zusammengehörigen Wahrscheinlichkeiten in γ zu 1. Zusammen folgt $\gamma \in \mathcal{A}$, also ist $\mathcal{A}$ auch konvex.

2. $B(\alpha)$ ist nicht-leer: U_i ist für festes α_{-i} linear in der gemischten Strategie von Spieler i, d.h. für $\beta_i, \gamma_i \in \Delta(A_i)$ gilt

$$U_i(\alpha_{-i}, \lambda\beta_i + (1-\lambda)\gamma_i) = \lambda U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) + (1-\lambda) U_i(\alpha_{-i}, \gamma_i) \qquad \text{für } \lambda \in [0, 1] \quad (3.1)$$

Eine mögliche Interpretation der Linearität ist es, dass man eine Metamischung spielt, d.h. mit Wahrscheinlichkeit λ spielt man β_i und mit Wahrscheinlichkeit $(1-\lambda)$ spielt man γ_i.

Daraus folgt, dass U_i stetig auf $\Delta(A_i)$ ist. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen haben ihr Maximum in der Menge. Also ist jedes $B_i(\alpha_{-i})$ und damit auch $B(\alpha)$ eine nicht-leere Menge.

3. $B(\alpha)$ ist konvex, da $B_i(\alpha_{-i})$ konvex ist: seien $\alpha_i', \alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i})$, d.h.

$$U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i') = U_i(\alpha_{-i}, \alpha_i'').$$

Wegen Gleichung 3.1 gilt dann auch

$$\lambda\alpha_i' + (1-\lambda)\alpha_i'' \in B_i(\alpha_{-i}).$$

4. Es ist noch zu zeigen, dass B ober-hemi-stetig ist. Sei (α^n, β^n) eine Folge in $\text{Graph}(B)$ mit $\lim_{n\to\infty}(\alpha^n, \beta^n) = (\alpha, \beta)$; $\alpha^n, \beta^n, \alpha, \beta \in \prod_i \Delta(A_i)$ und $\beta^n \in B(\alpha^n)$. Zeige, dass dann $(\alpha, \beta) \in \text{Graph}(B)$:

Es gilt für alle $i \in N$:

$$
\begin{aligned}
U_i(\alpha_{-i}, \beta_i) &\overset{\text{Def. } \alpha,\ \beta}{=} U_i(\lim_{n\to\infty}(\alpha^n_{-i}, \beta^n_i)) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} \lim_{n\to\infty} U_i(\alpha^n_{-i}, \beta^n_i) \\
&\overset{\beta^n_i \text{ beste Antwort auf } \alpha^n_{-i}}{\geq} \lim_{n\to\infty} U_i(\alpha^n_{-i}, \beta'_i) \qquad \text{für alle } \beta'_i \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Stetigkeit}}{=} U_i(\lim_{n\to\infty} \alpha^n_{-i}, \beta'_i) \qquad \text{für alle } \beta'_i \in \Delta(A_i) \\
&\overset{\text{Def. } \alpha_i}{=} U_i(\alpha_{-i}, \beta'_i) \qquad \text{für alle } \beta'_i \in \Delta(A_i)
\end{aligned}
$$

Also ist β_i eine beste Antwort auf α_{-i} für alle $i \in N$, damit $\beta \in B(\alpha)$ und schließlich $(\alpha, \beta) \in \text{Graph}(B)$.

□

Lemma 7. *Sei $G = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ ein endliches strategisches Spiel. Dann ist $\alpha^* \in \prod_i \Delta(A_i)$ ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien gdw. für jeden Spieler $i \in N$ jede reine Strategie aus der Unterstützungsmenge von α^*_i eine beste Antwort auf α^*_{-i} ist.*

Für den einzelnen Spieler ist es also – wenn die anderen Spieler ihre gemischten Strategien beibehalten – egal, ob er seine gemischte Strategie oder eine Einzelaktion daraus spielt.

Beweis. Sei zunächst α^* ein Nash-Gleichgewicht mit $a_i \in \mathit{supp}(\alpha^*_i)$. Angenommen, a_i ist keine beste Antwort auf α^*_{-i}. Wegen der Linearität von U_i kann Spieler i seine Auszahlung verbessern, indem er Gewicht von a_i auf andere Aktionen in $\mathit{supp}(\alpha^*_i)$ verteilt. Also war α^*_i keine beste Antwort und somit im Widerspruch zur Voraussetzung α^* kein Nash-Gleichgewicht.

Für die andere Richtung der Äquivalenz nehmen wir an, dass α^* kein Nash-Gleichgewicht ist. Dann muss es ein $i \in N$ und eine Strategie α'_i mit der Eigenschaft geben, dass $U_i(\alpha^*_{-i}, \alpha'_i) > U_i(\alpha^*_{-i}, \alpha^*_i)$. Wegen der Linearität von U_i muss es eine Aktion $a'_i \in \mathit{supp}(\alpha'_i)$ geben, die höheren Nutzen als eine Aktion $a''_i \in \mathit{supp}(\alpha^*_i)$ bringt; $\mathit{supp}(\alpha^*_i)$ besteht also nicht nur aus besten Antworten auf α^*_{-i}. □

Bemerkung 37. Ist $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i)\rangle$ mit $A_1 = \{T, B\}$ und $A_2 = \{L, R\}$ ein Zwei-Spieler-Spiel mit je zwei möglichen Aktionen und ist (α^*_1, α^*_2) mit $\alpha^*_1(T) = 1$ und $0 < \alpha^*_2(L) < 1$ ein Nash-Gleichgewicht in G, so ist auch mindestens eines der Profile (T, L) und (T, R) ein Nash-Gleichgewicht in G.

Nach Voraussetzung sind sowohl L als auch R beste Antworten auf T. Angenommen, T wäre weder auf L noch auf R eine beste Antwort. Dann wäre B sowohl auf L als auch auf R eine bessere Antwort als T. Wegen der Linearität des erwarteten Nutzens wäre B auch eine bessere Antwort als T auf α^*_2, im Widerspruch zu der Annahme, dass (α^*_1, α^*_2) ein Nash-Gleichgewicht in G ist.

Betrachte zum Beispiel das Nash-Gleichgewicht $(\{T \mapsto 1, B \mapsto 0\}, \{L \mapsto \frac{1}{10}, R \mapsto \frac{9}{10}\})$ in dem Spiel

	L	R
T	1, 1	1, 1
B	2, 2	−5, −5

Hier ist auch (T, R) ein (reines) Nash-Gleichgewicht.

Beispiel 38. Gemischte Nash-Gleichgewichte bei Bach oder Strawinsky:

		Strawinsky-Fan	
		B	S
Bach-Fan	B	$2,1$	$0,0$
	S	$0,0$	$1,2$

Allgemein: vier mögliche Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.

Die möglichen echt gemischten Strategieprofile sind

$$\{B\} \text{ vs. } \{B,S\}, \qquad \{S\} \text{ vs. } \{B,S\}, \qquad \{B,S\} \text{ vs. } \{B\},$$
$$\{B,S\} \text{ vs. } \{S\} \qquad \text{und} \qquad \{B,S\} \text{ vs. } \{B,S\}$$

Bei „Bach oder Strawinsky“ gibt es zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien, nämlich (B, B) und (S, S). Wie sieht aber ein echt gemischtes Nash-Gleichgewicht für „Bach oder Strawinsky“ aus? Betrachte hier nur Nash-Gleichgewichte mit $\{B, S\}$ vs. $\{B, S\}$.

Angenommen, (α_1, α_2) ist das gemischte Nash-Gleichgewicht mit $0 < \alpha_1(B) < 1$ und $0 < \alpha_2(B) < 1$. Dann muss wegen Lemma 7 gelten, dass

$$U_1((1,0), (\alpha_2(B), \alpha_2(S))) = U_1((0,1), (\alpha_2(B), \alpha_2(S))).$$

Die linke Seite dieser Gleichung entspricht dem Fall, dass Spieler 1 das Bach-Konzert besucht und hat den Wert $2\cdot\alpha_2(B)+0\cdot\alpha_2(S)$. Die rechte Seite entspricht der Aktion, das Strawinsky-Konzert zu besuchen und hat den Wert $0 \cdot \alpha_2(B) + 1 \cdot \alpha_2(S) = 1 \cdot (1 - \alpha_2(B))$. Gleichsetzen der Werte ergibt $2 \cdot \alpha_2(B) = 1 - \alpha_2(B)$. Daraus folgt, dass $\alpha_2(B) = \frac{1}{3}$ und $\alpha_2(S) = \frac{2}{3}$.

Analog erhält man für Spieler 1, dass $\alpha_1(B) = \frac{2}{3}$ und $\alpha_1(S) = \frac{1}{3}$. Das Nutzenprofil dieses Gleichgewichts ist $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

3.2 Evolutionäre Gleichgewichte

Idee: die Spieler sind biologische Organismen, die derselben Art angehören und denen verschiedene Strategien zur Verfügung stehen. Die Aktionsauswahl wird durch die „Natur“

(Vererbung, Mutation) getroffen. Der Nutzen entspricht den Überlebenschancen eines Individuums.

Es soll die Frage beantwortet werden, ob es Strategien gibt, die in dem Sinne „evolutionär stabil“ sind, dass sie ein stabiles Gleichgewicht in der Population herstellen, in dem Mutationen „unattraktiv“ sind.

Bei der spieltheoretischen Modellierung betrachten wir nur Zwei-Personenspiele, die für die „Begegnung“ zweier Individuen stehen, d.h. $N = \{1, 2\}$. Die Tatsache, dass die Individuen derselben Art angehören, wird dadurch modelliert, dass $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ (schreibe deshalb kurz $u := u_1$). Gemischte Strategien entsprechen gemischten Populationen.

Eine Strategie $b^* \in A_1$ ist evolutionär stabil, wenn sie gegen Mutationen resistent ist. Wenn ein kleiner Anteil $\varepsilon > 0$ an Individuen mutiert, d.h. $b \in A_1 \setminus \{b^*\}$ wählt, soll sich trotzdem b^* durchsetzen:

$$\overbrace{\underbrace{(1-\varepsilon)u(b,b^*)}_{\text{M vs. R}} + \underbrace{\varepsilon u(b,b)}_{\text{M vs. M}}}^{U_M \text{ Mutant}} < \overbrace{\underbrace{(1-\varepsilon)u(b^*,b^*)}_{\text{R vs. R}} + \underbrace{\varepsilon u(b^*,b)}_{\text{R vs. M}}}^{U_R \text{ Rein}}.$$

Für kleines ε ist das äquivalent zu

$$u(b, b^*) < u(b^*, b^*) \quad \text{oder} \quad [u(b, b^*) = u(b^*, b^*) \text{ und } u(b, b) < u(b^*, b)]$$

Definition 39 (Symmetrisches strategisches Spiel)**.** Ein strategisches Spiel mit zwei Spielern $G = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ heißt **symmetrisch**, falls $A_1 = A_2$ und $u_1(a, b) = u_2(b, a)$ für alle $a, b \in A_1$ gilt. $B := A_1 (= A_2)$ heißt Aktionsmenge von G, $u := u_1$ heißt Nutzen- oder Auszahlungsfunktion von G.

Definition 40 (Evolutionär stabile Strategie)**.** Sei G ein symmetrisches strategisches Spiel mit Aktionsmenge B und Nutzenfunktion u. Eine Strategie $b^* \in B$ heißt **evolutionär stabil**, falls

- (b^*, b^*) ein Nash-Gleichgewicht von G ist und
- für alle besten Antworten $b \in B$ auf b^* mit $b \neq b^*$ gilt $u(b, b) < u(b^*, b)$.

Beispiel 41. Falke-oder-Taube-Spiel mit reellem Parameter $c > 0$ für Verlust bei einem Kampf.

	T	F
T	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$0, 1$
F	$1, 0$	$\frac{1}{2}(1-c), \frac{1}{2}(1-c)$

Hat dieses Spiel evolutionär stabile Strategien? Bestimme dazu in einem ersten Schritt alle symmetrischen Nash-Gleichgewichte (b^*, b^*) und untersuche diese in einem zweiten Schritt darauf, ob sie die „Mutanten-Eigenschaft“ erfüllen, d.h. ob für alle abweichenden besten Antworten b gilt, dass $u(b, b) < u(b^*, b)$.

Zur Bestimmung der symmetrischen Nash-Gleichgewichte:

1. reine gegen reine Strategie: (T,T) ist kein Nash-Gleichgewicht, (T,F) und (F,T) sind genau dann Nash-Gleichgewichte, wenn $c \geq 1$, hier aber uninteressant, weil sie nicht symmetrisch sind, und (F,F) ist ein Nash-Gleichgewicht genau dann, wenn $c \leq 1$. F ist also unser erster Kandidat für eine evolutionär stabile Strategie.
2. reine gegen gemischte Strategie: uninteressant, da ein solches Nash-Gleichgewicht nicht symmetrisch wäre.
3. gemischte gegen gemischte Strategie: sei $\alpha^* = (b^*, b^*)$ mit $b^* = \{\, T \mapsto p, F \mapsto 1-p \,\}$, wobei $0 < p < 1$. Es muss gelten, dass $u(T, b^*) = u(F, b^*)$, d.h. $p \cdot \frac{1}{2} + (1-p) \cdot 0 = p \cdot 1 + (1-p) \cdot \frac{1}{2}(1-c)$. Vereinfacht man diese Gleichung, so erhält man zunächst $\frac{1}{2}p = p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}pc$. Dies lässt sich zu $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}pc$ vereinfachen. Löst man diese Gleichung nach p auf, erhält man $p = \frac{2}{c}(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{c}$. Wegen $0 < p < 1$ muss $c > 1$ sein. Damit ist α^* für $c > 1$ ein Nash-Gleichgewicht und somit unser zweiter Kandidat für eine evolutionär stabile Strategie.

Untersuche nun die beiden oben ermittelten Kandidaten, ob sie die „Mutanten-Eigenschaft“ erfüllen. Betrachte also alle anderen besten Antworten auf b^*.

1. Kandidat 1: $b^* = F$ für $c \leq 1$. Falls $c < 1$, ist F strikt dominant, d.h. es keine weiteren besten Antworten auf F. Damit ist F evolutionär stabil. Falls $c = 1$, ist auch jede gemischte Strategie $b = \{\, T \mapsto q, F \mapsto 1-q \,\}$ mit $0 < q \leq 1$ eine (abweichende) beste Antwort auf b^*. Da aber $u(b,b) = \frac{1}{2}q^2 + 1 \cdot (1-q) \cdot q = \frac{1}{2}q^2 + q - q^2 = q - \frac{1}{2}q^2 < q = u(b^*, b)$, ist F für $c \leq 1$ evolutionär stabil.
2. Kandidat 2: $b^* = \{\, T \mapsto p, F \mapsto 1-p \,\}$ für $c > 1$. Alle $b \in \Delta(\{\, T, F \,\})$ mit $b = \{\, T \mapsto q, F \mapsto 1-q \,\}$, $0 \leq q \leq 1$, sind beste Antworten auf b^*. Betrachte zunächst nur reine beste Antworten: mit $b = T$ ist $u(b^*, b) = (1 - \frac{1}{c}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \cdot 1 > \frac{1}{2} = u(b,b)$, mit $b = F$ ist $u(b^*, b) = (1 - \frac{1}{c}) \cdot 0 + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2}(1-c) > \frac{1}{2}(1-c) = u(b,b)$. Die Bedingung $u(b,b) < u(b^*, b)$ ist wegen $|\{\, T, F \,\}| = 2$ auch für alle anderen $b \in \Delta(\{\, T, F \,\})$ erfüllt. Damit ist b^* für $c > 1$ evolutionär stabil.

Aus der Definition von evolutionär stabilen Strategien folgt, dass symmetrische Nash-Gleichgewichte (b^*, b^*), für die es keine andere beste Antwort gibt, evolutionär stabile Strategien sein müssen. Nicht-strikte NGs müssen nicht unbedingt evolutionär stabile Strategien sein.

Beispiel 42. Betrachte das Spiel

	1	2	3
1	γ, γ	$1, -1$	$-1, 1$
2	$-1, 1$	γ, γ	$1, -1$
3	$1, -1$	$-1, 1$	γ, γ

mit reellem Parameter $0 < \gamma < 1$. Das Profil (α, α) mit $\alpha = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ist ein gemischtes Nash-Gleichgewicht. Die Auszahlung für beide Spieler beträgt $\frac{\gamma}{3}$. α ist aber keine evolutionär stabile Strategie, denn ein Mutant könnte die reine Strategie $\alpha' = (1, 0, 0)$ – oder eine beliebige andere reine Strategie – spielen. Gegen α-Spieler erhielte er damit Auszahlung

$\frac{\gamma}{3}$, gegen andere Mutanten, die auch α' spielen, aber Auszahlung $\gamma > \frac{\gamma}{3}$. Das heißt, α_i ist keine evolutionär stabile Strategie. Beachte, dass α' *kein* neues Nash-Gleichgewicht (α', α') induziert.

4 Algorithmen und Komplexität

In diesem Kapitel werden Algorithmen zur Bestimmung von Nash-Gleichgewichten vorgestellt und auf ihre Komplexität untersucht. Die zentralen Aussagen werden sein, dass in Nullsummenspielen das Finden eines Nash-Gleichgewichts in gemischten Strategien nur polynomielle Zeit benötigt, da man dieses Problem auf das Lösen eines Linearen Programmes zurückführen kann, dass für allgemeine Zwei-Personen-Matrixspiele das Finden eines gemischten Nash-Gleichgewichts ein Problem ist, dessen Komplexität noch unbekannt ist, und dass das Finden eines gemischten Nash-Gleichgewichts mit einem bestimmten Wert (im Sinne von Summe der Auszahlungen oder von Auszahlung für einen der Spieler) **NP**-vollständig ist.

4.1 Nullsummenspiele

Nach dem Satz von Nash existieren Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien. Nach dem Maximin-Satz ist jedes Nash-Gleichgewicht ein Paar von Maximinimierern. Da mindestens ein Nash-Gleichgewicht existiert und damit alle Paare von Maximinimierern Nash-Gleichgewichte sind und zu den gleichen Auszahlungen führen, genügt es, solche Paare zu berechnen.

Laufe dazu über alle gemischten Strategien α von Spieler 1 und bestimme jeweils eine für Spieler 1 schlechteste Antwort β_α von Spieler 2. Bestimme dann einen Maximinimierer α so, dass $U_1(\alpha, \beta_\alpha)$ maximal wird. Wegen des Support-Lemmas (Lemma 7) reicht es aus, anstelle aller möglichen Strategien β_α nur die reinen Antworten von Spieler 2 zu betrachten.

4.1.1 Exkurs Lineare Programmierung/Lineare Optimierung

Der Ausdruck „Lineare Programmierung“ wurde in den 1930er Jahren geprägt – bevor Computer programmiert wurden. Damals bedeutete „Programmierung“ noch Planung (vgl. auch Ausdruck „dynamische Programmierung“).

Worum es geht: Lösung eines Systems linearer Ungleichungen über n reellwertigen Variablen unter Berücksichtigung einer linearen Zielfunktion, die man maximieren (oder minimieren) möchte.

Beispiel 43 (Sortimentproblem)**.** Es werden zwei Sortimente produziert, die beide ganz verkauft werden können.

Sortiment 1: 25 Minuten Schneiden, 60 Minuten Zusammenbau, 68 Minuten Nachbearbeitung. 30 Euro Gewinn pro Artikel.

Sortiment 2: 75 Minuten Schneiden, 60 Minuten Zusammenbau, 34 Minuten Nachbearbeitung. 40 Euro Gewinn pro Artikel.

Pro Tag stehen zur Verfügung: 450 Minuten zum Zuschneiden, 480 Minuten zum Zusammenbau, 476 Minuten für die Nachbearbeitung.

Wie viele Artikel der beiden Sortimente stellt man her, wenn man den Gewinn maximieren will? Sei zur Beantwortung dieser Frage x die Anzahl der produzierten Artikel in Sortiment 1, y die Anzahl der produzierten Artikel in Sortiment 2.

Die oben genannten Einschränkungen und das Ziel der Gewinnmaximierung lassen sich wie folgt formalisieren:

$$x \geq 0, y \geq 0 \tag{4.1}$$

$$25x + 75y \leq 450 \text{ (oder äquiv. } y \leq \frac{450}{75} - \frac{25x}{75} = 6 - \frac{1}{3}x) \tag{4.2}$$

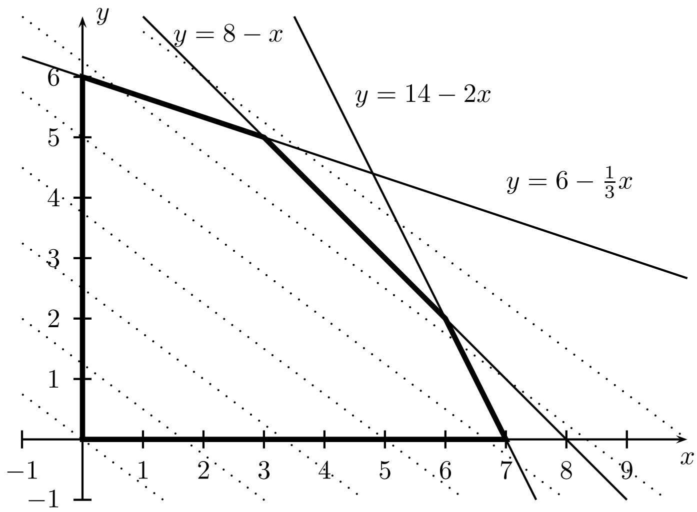
$$60x + 60y \leq 480 \text{ (oder äquiv. } y \leq 8 - x) \tag{4.3}$$

$$68x + 34y \leq 476 \text{ (oder äquiv. } y \leq 14 - 2x) \tag{4.4}$$

$$\text{Maximiere } z = 30x + 40y \tag{4.5}$$

Die Ungleichungen (4.1)-(4.4) beschreiben zulässige Lösungen. Zeile (4.5) ist die *Zielfunktion* (objective function). Die Ungleichungen (4.1)-(4.4) beschreiben eine *konvexe* Menge in $\mathbb{R}^2$.

In der folgenden Abbildung sind die zulässigen Lösungen genau die Punkte in der von den drei Geraden und den Koordinatenachsen eingeschlossenen konvexen Menge. Auf den gepunkteten Linien ist der Nutzen z konstant, von unten nach oben handelt es sich um die Isolinien für $z = 0, 50, 100, \ldots, 300$. Der Nutzen wird also in dem Schnittpunkt der Geraden $y = 6 - \frac{1}{3}x$ und $y = 8 - x$, d.h. in $(x, y) = (3, 5)$, maximiert, der maximale Nutzen beträgt 290.



Definition 44 (Lineares Programm in Standardform)**.** Ein **Lineares Programm in Standardform** besteht aus n reellwertigen Variablen x_i, n Koeffizienten b_i, m Konstanten c_j, $m \cdot n$ Koeffizienten a_{ji}, m Ungleichungen der Form

$$c_j \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$$

sowie der (zu minimierenden) **Zielfunktion**

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i \text{ (für } x_i \geq 0).$$

Will man die Zielfunktion nicht minimieren, sondern maximieren, so genügt es, die Vorzeichen der Koeffizienten b_i umzukehren. Anstelle von Ungleichungen kann man auch Gleichungen wählen, da

$$x + y \leq c \text{ gdw. } x + y + z = c \text{ für ein } z \geq 0.$$

Ein solches z heißt **Slack-Variable**.

Die **Simplex-Methode** ist das Standardverfahren, um lineare Programme zu lösen, d.h. um zulässige Lösungen zu finden, die die Zielfunktion minimieren bzw. maximieren. Diese Methode hat im schlechtesten Fall exponentielle Laufzeit, ist aber in allen praktischen Fällen „gutmütig". Daneben gibt es auch ein Polynomialzeit-Lösungsverfahren, das jedoch in der Praxis kaum zum Einsatz kommt.

4.1.2 Anwendung auf Nullsummenspiele

Seien $A_1 = \{ a_1, \ldots, a_m \}$ und $A_2 = \{ b_1, \ldots, b_n \}$.

Spieler 1 sucht eine gemischte Strategie α_1. Bestimme für jedes α_1 von Spieler 1 den Nutzen bei der schlimmsten Antwort des Gegners, dann maximiere darüber. Das entsprechende lineare Programm ist

$$\begin{aligned} \alpha_1(a_i) &\geq 0 \qquad \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \} \\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(a_i) &= 1 \\ U_1(\alpha_1, b_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_1(a_i) \cdot u_1(a_i, b_j) &\geq u \qquad \text{für alle } j \in \{ 1, \ldots, n \} \\ \text{Maximiere } u. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Programms ist ein Maximinimierer für Spieler 1. Die Lösung eines analogen Programmes führt zu einem Maximinimierer für Spieler 2.

Da bei Nullsummenspielen, die ein Nash-Gleichgewicht besitzen, Maximinimierung und Minimaximierung das gleiche Ergebnis liefern, kann man auch das lineare Programm mit den Ungleichungen

$$U_1(a_i, \alpha_2) \leq u \qquad \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \}$$

aufstellen und u minimieren. Für α_2 entsprechend.

4.2 Finden von Nash-Gleichgewichten bei allgemeinen Zwei-Personen-Matrixspielen

Für allgemeine Spiele funktioniert die LP-Methode nicht. Benutze stattdessen Instanzen des **Linear Complementarity Problem** (LCP), bei dem zu den linearen (Un-)Gleichungen ein weiterer Typ von Bedingungen hinzukommt: mit zwei Gruppen von Variablen $X = \{ x_1, \ldots, x_k \}$ und $Y = \{ y_1, \ldots, y_k \}$ können für $i \in \{ 1, \ldots, k \}$ Bedingungen der Form $x_i \cdot y_i = 0$ (oder äquivalent $x_i = 0 \vee y_i = 0$) formuliert werden. Im Gegensatz zu linearen Programmen gibt es keine Optimierungsbedingung.

Damit sind Nash-Gleichgewichte für beliebige Zwei-Personen-Matrixspiele beschreibbar. Sei (α, β) ein Nash-Gleichgewicht mit Nutzenprofil (u, v) in dem Spiel $\langle \{ 1, 2 \}, (A_1, A_2), (u_1, u_2) \rangle$ mit $A_1 = \{ a_1, \ldots, a_m \}$ und $A_2 = \{ b_1, \ldots, b_n \}$. Dann muss gelten:

$$\begin{aligned}
u - U_1(a_i, \beta) &\geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \} && (4.6)\\
v - U_2(\alpha, b_j) &\geq 0 \quad \text{für alle } j \in \{ 1, \ldots, n \} && (4.7)\\
\alpha(a_i) \cdot (u - U_1(a_i, \beta)) &= 0 \quad \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \} && (4.8)\\
\beta(b_j) \cdot (v - U_2(\alpha, b_j)) &= 0 \quad \text{für alle } j \in \{ 1, \ldots, n \} && (4.9)\\
\alpha(a_i) &\geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{ 1, \ldots, m \}, \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha(a_i) = 1 && (4.10)\\
\beta(b_j) &\geq 0 \quad \text{für alle } j \in \{ 1, \ldots, n \}, \qquad \sum_{j=1}^{n} \beta(b_j) = 1 && (4.11)
\end{aligned}$$

Beachte in den Gleichungen (4.8) und (4.9), dass etwa $\alpha(a_i) \cdot (u - U_1(a_i, \beta)) = 0$ genau dann, wenn $\alpha(a_i) = 0$ oder $u - U_1(a_i, \beta) = 0$. Einer der beiden Faktoren muss aber immer verschwinden, da

1. $\alpha(a_i) = 0$ gilt, falls a_i nicht im Support der Gleichgewichtsstrategie liegt
2. $u - U_1(a_i, \beta) = 0$ gilt, falls a_i im Support der Gleichgewichtsstrategie liegt, weil dann a_i eine beste Antwort auf β ist (vgl. auch Bedingung (4.6)).

Die obige LCP-Formulierung kann mit zusätzlichen Variablen in LCP-Normalform umgeformt werden.

Satz 8. *Ein Strategieprofil (α, β) in gemischten Strategien mit Auszahlungsprofil (u, v) ist ein Nash-Gleichgewicht gdw. es eine Lösung des LCPs (4.6)-(4.11) über (α, β) und (u, v) ist.*

Beweis. Dass jedes Nash-Gleichgewicht eine Lösung des LCPs ist, ist wegen des Support-Lemmas (Lemma 7) klar. Sei also (α, β, u, v) eine Lösung des LCPs. Wegen der Bedingungen (4.10) und (4.11) sind α und β gemischte Strategien. Wegen (4.6) ist u mindestens so groß wie die maximale Auszahlung über alle möglichen reinen Antworten, wegen (4.8) ist u genau das Maximum der Auszahlungen. Wird die reine Strategie a_i mit positiver Wahrscheinlichkeit gespielt, dann hat die Auszahlung für Spieler i als Reaktion auf die Strategie β wegen (4.8) den Wert u. Mit der Linearität des erwarteten Nutzens folgt, dass α eine beste Antwort auf β ist. Analog zeigt man, dass auch β eine beste Antwort auf α und somit (α, β) ein Nash-Gleichgewicht mit Auszahlung (u, v) ist. □

4.2.1 Lösungsalgorithmus für LCPs

Wie löst man ein LCP? Eine Möglichkeit ist der folgende naive Algorithmus.

1. Zähle alle $(2^n-1)\cdot(2^m-1)$ möglichen Paare von Supportmengen auf. Für jedes solche Paar $(supp(\alpha), supp(\beta))$:
2. Konvertiere das LCP in ein lineares Programm. Dabei sind (4.6), (4.7), (4.10) und (4.11) bereits lineare Ungleichungen, Bedingungen der Form $\alpha(a_i)\cdot(u-U_1(a_i,\beta))=0$ werden durch eine neue lineare Gleichung ersetzt, nämlich
   - $u-U_1(a_i,\beta)=0$, falls $a_i \in supp(\alpha)$ und
   - $\alpha(a_i)=0$, sonst,

   entsprechend für Bedingungen der Form $\beta(b_j)\cdot(v-U_2(\alpha,b_j))=0$. Da die Kriterien, die optimiert werden sollen, bereits in den Constraints stehen, benötigen wir eine beliebige, von den Constraints unabhängige Optimierungsfunktion, etwa die konstante Nullfunktion.
3. Wende einen Lösungsalgorithmus für lineare Programme, zum Beispiel den Simplex-Algorithmus, auf das transformierte Programm an.

Die Laufzeit des naiven Algorithmus beträgt $\mathcal{O}(p(n+m)\cdot 2^{n+m})$, wobei p ein geeignetes Polynom ist. In der Praxis besser geeignet ist der Lemke-Howson-Algorithmus. Die Frage, ob LcpSolve in **P** liegt, ist offen, aber es liegt auf jeden Fall in **NP**, da man den naiven Algorithmus auch als nichtdeterministischen Polynomialzeitalgorithmus betrachten kann, bei dem im ersten Schritt ein Paar aus $supp(\alpha)$ und $supp(\beta)$ „geraten", im zweiten Schritt wie oben vorgegangen und im dritten Schritt ein Polynomialzeitalgorithmus für die Lösung linearer Programme angewandt wird.

4.3 Komplexität der Nash-Gleichgewichts-Bestimmung in allgemeinen Zwei-Personen-Spielen

Definition 45 (Notationen der Aussagenlogik)**.** Sei φ eine aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform (KNF). Wir schreiben $V(\varphi)$ für die Menge der Variablen in φ, $L(\varphi)$ für die Menge der Literale über $V(\varphi)$, d.h. $L(\varphi)=V(\varphi)\cup\{\neg v \mid v\in V(\varphi)\}$. Dabei unterscheiden wir für $v\in V(\varphi)$ die Variable v von dem positiven Literal v. Ist $\ell\in L(\varphi)$, so ist $\overline{\ell}$ das zu ℓ komplementäre Literal, d.h. $\overline{\ell}=\neg v$, falls $\ell=v$, und $\overline{\ell}=v$, falls $\ell=\neg v$. $v(\ell)$ ist die zum Literal $\ell\in L(\varphi)$ gehörende Variable, $C(\varphi)$ die Menge der Klauseln in φ.

Sei $\Theta : V(\varphi)\to\{T,F\}$ eine Variablenbelegung. Wir schreiben $L(\Theta)$ für die Menge der Literale, die von Θ erfüllt werden, formal $L(\Theta)=\{\ell\in L(\varphi)\mid \Theta\models\ell\}$.

Definition 46 (Induziertes Spiel)**.** Sei φ eine KNF-Formel und $n:=|V(\varphi)|$. Das **von φ induzierte Spiel** $G(\varphi)$ ist das symmetrische Zwei-Personen-Spiel mit der Aktionenmenge $L(\varphi)\cup V(\varphi)\cup C(\varphi)\cup\{\square\}$ und der Nutzenfunktion u, die definiert ist durch

u	$\ell'\in L(\varphi)$	$v'\in V(\varphi)$	$c'\in C(\varphi)$	$\square$
$\ell\in L(\varphi)$	1, falls $\ell\neq\overline{\ell'}$ -2, falls $\ell=\overline{\ell'}$	-2	-2	-2
$v\in V(\varphi)$	2, falls $v\neq v(\ell')$ $2-n$, falls $v=v(\ell')$	-2	-2	-2
$c\in C(\varphi)$	2, falls $\ell'\notin c$ $2-n$, falls $\ell'\in c$	-2	-2	-2
$\square$	1	1	1	0

Definition 47. Sei Θ eine Variablenbelegung zu φ. Die **von Θ induzierte Strategie** α^Θ ist definiert durch

$$\alpha^\Theta(a) := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } a \in L(\Theta) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Satz 9 (Satz von Conitzer und Sandholm)**.** *Sei φ eine KNF-Formel. Dann hat $G(\varphi)$ genau die folgenden Nash-Gleichgewichte:*

1. *das reine Profil $(\Box, \Box)$ mit Nutzenprofil $(0, 0)$ und*
2. *für jede erfüllende Belegung Θ von φ das Profil $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ mit Nutzenprofil $(1, 1)$.*

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass alle genannten Strategieprofile Nash-Gleichgewichte sind. Das Profil $(\Box, \Box)$ ist offensichtlich ein Nash-Gleichgewicht, denn Abweichungen verringern den Nutzen von 0 auf -2. Sei also Θ eine erfüllende Belegung von φ. Betrachte das Profil $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ und speziell $U(a, \alpha^\Theta)$ für alle *reinen* Strategien $a \in L(\varphi) \cup V(\varphi) \cup C(\varphi) \cup \{\Box\}$. Wir unterscheiden fünf Fälle:

1. falls $a \in L(\Theta)$: Spieler 2 spielt immer ein Literal $a' \in L(\Theta)$. Da auch $a \in L(\Theta)$, können a und a' nicht komplementär sein. Also erhält Spieler 1 den Nutzen 1, d.h. $U(a, \alpha^\Theta) = 1$.
2. falls $a \in L(\varphi) \setminus L(\Theta)$: Spieler 2 spielt ein Literal $a' \in L(\Theta)$. Der Nutzen von Spieler 1 ist abhängig davon, ob a' komplementär zu a ist oder nicht, hat aber in jedem Fall einen Wert kleiner oder gleich 1. Somit ist wegen der Linearität des erwarteten Nutzens auch $U(a, \alpha^\Theta) \leq 1$.
3. falls $a \in V(\varphi)$: Spieler 2 spielt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ ein Literal a' mit $v(a') = a$, was Spieler 1 den Nutzen $2 - n$ bringt, und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{n}$ ein anderes Literal, was Spieler 1 den Nutzen 2 bringt. Der erwartete Nutzen von Spieler 1 beträgt somit $U(a, \alpha^\Theta) = \frac{1}{n}(2 - n) + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 2 = \frac{2}{n} - 1 + 2 - \frac{2}{n} = 1$.
4. falls $a \in C(\varphi)$: Wegen $\Theta \models \varphi$ gilt auch $\Theta \models a$, d.h. $L(\Theta) \cap a \neq \varnothing$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $1 - \frac{1}{n}$ beträgt der Nutzen von Spieler 1 also 2, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{1}{n}$ beträgt er $2 - n$. Damit ist $U(a, \alpha^\Theta) \leq 2(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n}(2 - n) = 1$.
5. falls $a = \Box$: In diesem Fall ist $U(a, \alpha^\Theta) = 1$.

Insgesamt folgt, dass alle $a \in supp(\alpha^\Theta)$ beste Antworten auf α^Θ sind und daher $(\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ nach dem Support-Lemma ein Nash-Gleichgewicht ist.

Wir müssen nun noch beweisen, dass es in $G(\varphi)$ keine weiteren Nash-Gleichgewichte gibt. Sei dazu (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht in $G(\varphi)$. Wir wollen zunächst ausschließen, dass eine der beiden Strategien α_1, α_2 die reine Strategie $\Box$ ist. Ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \Box$, so liegt zwar ein Nash-Gleichgewicht vor, jedoch kein *neues*, sondern eines der Gleichgewichte, die im Satz von Conitzer und Sandholm erwähnt werden. Ist $\alpha_2 = \Box$, so ist $\alpha_1 = \Box$ die *einzige* beste Antwort auf α_2. Also existiert kein Nash-Gleichgewicht $(\alpha, \Box)$ oder $(\Box, \alpha)$ mit $\alpha \neq \Box$.

Betrachte nun nur noch Fälle mit $\alpha_1(\Box) < 1$ und $\alpha_2(\Box) < 1$. Sei (β_1, β_2) das Strategieprofil, das sich aus (α_1, α_2) in den Situationen ergibt, in denen kein Spieler $\Box$ spielt, d.h. wo für $i \in \{1, 2\}$ gilt, dass $\beta_i(\Box) = 0$ und $\beta_i(a) = \alpha_i(a) \cdot \frac{1}{1 - \alpha_i(\Box)}$ für alle $a \neq \Box$. Es gilt

$U(\beta_1, \beta_2) \geq 1$, denn sonst wäre

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, \beta_2) &= \alpha_1(\Box) \cdot 1 + (1 - \alpha_1(\Box)) \cdot U(\beta_1, \beta_2) \\ &< \alpha_1(\Box) \cdot 1 + (1 - \alpha_1(\Box)) \cdot 1 = 1 = U(\Box, \beta_2) \quad \text{sowie} \\ U(\alpha_1, \Box) &= \alpha_1(\Box) \cdot 0 + (1 - \alpha_1(\Box)) \cdot (-2) \\ &< 0 = U(\Box, \Box), \end{aligned}$$

ein Widerspruch, da α_1 dann keine beste Antwort auf α_2, eine Mischung aus β_2 und $\Box$, sein könnte.

Wegen der Symmetrie von $G(\varphi)$ gilt ebenso $U(\beta_2, \beta_1) \geq 1$. Durch Addition der beiden Ungleichungen erhalten wir

$$U(\beta_1, \beta_2) + U(\beta_2, \beta_1) \geq 2. \tag{4.12}$$

An der Nutzenmatrix lässt sich leicht ablesen, dass *kein* Ausgang eine Nutzensumme echt größer als 2 hat. Also haben *alle* möglichen Ausgänge unter (β_1, β_2) eine Nutzensumme von genau 2 und sind daher von der Art (ℓ, ℓ'), wobei $\ell, \ell' \in L(\varphi)$ und $\ell \neq \bar{\ell}'$. Insbesondere spielt Spieler i keine Variablen oder Klauseln, d.h. $\mathit{supp}(\beta_i) \subseteq L(\varphi)$ und $\mathit{supp}(\alpha_i) \subseteq L(\varphi) \cup \{\Box\}$ für $i \in \{1, 2\}$.

Angenommen, $\Box \in \mathit{supp}(\alpha_i)$. Dann kann sich der andere Spieler verbessern, indem er immer $\Box$ spielt, denn erstens ist $\Box$ eine mindestens so gute Antwort auf alle Aktionen aus $L(\varphi) \cup \{\Box\}$ wie die Aktionen aus $L(\varphi)$ und zweitens ist $\Box$ eine echt bessere Antwort auf $\Box$ als die Aktionen aus $L(\varphi)$. Dies steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist. Also ist $\Box \notin \mathit{supp}(\alpha_i)$ und damit $\alpha_i = \beta_i$ für alle $i \in \{1, 2\}$.

Wegen Ungleichung (4.12) ist somit $U(\alpha_1, \alpha_2) + U(\alpha_2, \alpha_1) \geq 2$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, \alpha_2) = U(\alpha_2, \alpha_1) &= 1 \quad \text{und damit} && (4.13) \\ u(a_1, a_2) = u(a_2, a_1) &= 1 \quad \text{für alle } a_i \in \mathit{supp}(\alpha_i). && (4.14) \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt ist zu zeigen, dass $\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) = \frac{1}{n}$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Angenommen, es gibt eine Variable $v \in V(\varphi)$ so, dass Spieler i mit Wahrscheinlichkeit $p < \frac{1}{n}$ ein zu v gehöriges Literal spielt. Dann könnte der Gegner durch Spielen von v seinen Nutzen erhöhen, denn

$$U(v, \alpha_i) = p \cdot (2 - n) + (1 - p) \cdot 2 = 2p - pn + 2 - 2p = 2 - pn > 2 - \frac{1}{n} \cdot n = 1,$$

wegen Gleichung (4.13) im Widerspruch dazu, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist. Also gibt es keine Variable $v \in V(\varphi)$, deren Literale zusammen mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als $\frac{1}{n}$ gespielt werden, d.h. $\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) \geq \frac{1}{n}$. Wegen $n = |V(\varphi)|$ folgt durch Aufsummieren über alle Variablen, dass

$$\alpha_i(\ell) + \alpha_i(\bar{\ell}) = \frac{1}{n} \tag{4.15}$$

für alle $\ell \in L(\varphi)$ und $i \in \{1, 2\}$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass $\mathit{supp}(\alpha_i)$ einer Variablenbelegung für φ entspricht, d.h. dass $\{\ell, \bar{\ell}\} \not\subseteq \mathit{supp}(\alpha_i)$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Nach Gleichung (4.15) spielt jeder Spieler mindestens ein Element aus $\{\ell, \bar{\ell}\}$ für alle $\ell \in L(\varphi)$. Nach Gleichung (4.14) kann es nicht sein, dass ein Spieler mit positiver Wahrscheinlichkeit ℓ und der andere mit positiver Wahrscheinlichkeit $\bar{\ell}$ spielt, da in diesem Fall der Nutzen beider Spieler -2 wäre. Somit können beide Spieler nur entweder ℓ oder $\bar{\ell}$ spielen, genauer:

$$\alpha_1(\ell) = \alpha_2(\ell) = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad \alpha_1(\bar{\ell}) = \alpha_2(\bar{\ell}) = 0$$

oder

$$\alpha_1(\ell) = \alpha_2(\ell) = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_1(\bar{\ell}) = \alpha_2(\bar{\ell}) = \frac{1}{n}.$$

Zum Abschluss des Beweises bleibt noch zu zeigen, dass $supp(\alpha_1)$ einer *erfüllenden* Belegung entspricht. Angenommen, Θ ist eine nicht-erfüllende Variablenbelegung für φ. Sei etwa $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha^\Theta$. Da $\Theta \not\models \varphi$, gibt es eine Klausel $c \in C(\varphi)$ mit $c \cap L(\Theta) = \varnothing$. Für dieses c gilt aber $U(c, \alpha_1) = 2 > 1 = U(\alpha_2, \alpha_1)$, im Widerspruch dazu, dass (α_1, α_2) ein Nash-Gleichgewicht ist.

Insgesamt haben wir nun bewiesen, dass $(\alpha_1, \alpha_2) = (\square, \square)$ oder $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha^\Theta, \alpha^\Theta)$ für eine φ erfüllende Variablenbelegung Θ sein muss. $\square$

Korollar 10. *Zu entscheiden, ob ein Nash-Gleichgewicht existiert, bei dem Spieler 1 eine Auszahlung von mindestens k erhält, ist* **NP***-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.*

Korollar 11. *Zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht mit Pareto-optimalem Auszahlungsprofil gibt, ist* **NP***-schwer. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen. (Ein Nash-Gleichgewicht hat ein Pareto-optimales Auszahlungsprofil $(v_1, \ldots, v_n)$, wenn es kein anderes Strategieprofil gibt, für dessen Auszahlungsprofil $(v'_1, \ldots, v'_n)$ gilt, dass $v'_i \geq v_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und dass es ein $i = 1, \ldots, n$ mit $v'_i > v_i$ gibt.)*

Korollar 12. *Es ist* **NP***-schwer zu entscheiden, ob es ein Nash-Gleichgewicht gibt, in dem ein Spieler eine bestimmte Aktion manchmal (bzw. nie) spielt. Dies gilt sogar im Fall von symmetrischen Zwei-Personen-Spielen.*

Korollar 13. *Es ist* **NP***-schwer zu entscheiden, ob ein Spiel mindestens zwei Nash-Gleichgewichte besitzt.*

5 Extensive Spiele mit perfekter Information

In Spielen hat man oft mehrere Züge hintereinander, was mit strategischen Spielen ohne weiteres nicht modelliert werden kann. Das Spiel kann dann aber durch einen Spielbaum beschrieben werden. Strategien sind nun nicht mehr einzelne Aktionen oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Aktionen, sondern Vorschriften, die für jeden Entscheidungspunkt im Spielbaum festlegen, welche Aktion dort gewählt wird.

Die extensive Form eines Spiels kann man in eine strategische Form übersetzen, in welcher man anschließend die Nash-Gleichgewichte bestimmen kann.

5.1 Formalisierung von extensiven Spielen

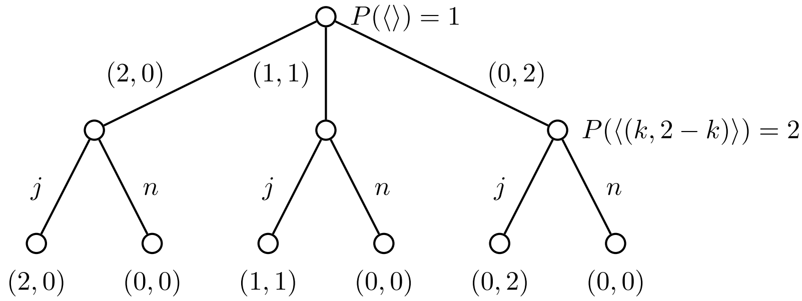
Definition 48 (Extensives Spiel mit perfekter Information)**.** Ein **extensives Spiel mit perfekter Information**, d.h. ein Spiel, in dem alle Spieler zu allen Zeitpunkten alle Informationen besitzen, die sie benötigen, um ihre Entscheidung zu treffen, hat folgende Komponenten:

- Eine endliche nicht-leere Menge N von Spielern.
- Eine Menge H (**Historien**) von Sequenzen mit folgenden Eigenschaften:
  - Die leere Sequenz $\langle\rangle$ gehört zu H
  - Falls $\langle a^1, \dots, a^k\rangle \in H$ (wobei $k = \infty$ sein kann) und $l < k$, dann ist auch $\langle a^1, \dots, a^l\rangle \in H$
  - Falls für eine unendliche Sequenz $\langle a^i\rangle_{i=1}^{\infty}$ gilt, dass $\langle a^i\rangle_{i=1}^{k} \in H$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann auch $\langle a^i\rangle_{i=1}^{\infty} \in H$.

  Alle unendlichen Historien und alle Historien $\langle a^i\rangle_{i=1}^{k} \in H$, für die es kein a^{k+1} gibt, so dass $\langle a^i\rangle_{i=1}^{k+1} \in H$, heißen terminale Historien. Die Menge der terminalen Historien wird mit Z bezeichnet. Elemente einer Historie heißen **Aktionen**.
- Eine Spielerfunktion $P : H \setminus Z \to N$, die bestimmt, welcher Spieler nach einer Historie als nächster am Zug ist.
- Für jeden Spieler $i \in N$ eine Auszahlungsfunktion $u_i : Z \to \mathbb{R}$ auf der Menge der terminalen Historien.

Das Spiel heißt endlich, wenn H endlich ist. Es hat einen **endlichen Horizont**, falls die Länge der Historien nach oben beschränkt ist.

Beispiel 49 (Verteilungsspiel)**.** Zwei gleiche Objekte sollen auf zwei Spieler verteilt werden. Spieler 1 schlägt die Aufteilung vor, Spieler 2 akzeptiert den Vorschlag oder lehnt ihn ab. Wenn Spieler 2 akzeptiert, werden die Objekte so aufgeteilt, wie von Spieler 1 vorgeschlagen, ansonsten erhält keiner der Spieler etwas. Darstellung als Spielbaum:



Formal ist hier $N = \{1,2\}$, $H = \{\langle\rangle, \langle(2,0)\rangle, \langle(1,1)\rangle, \langle(0,2)\rangle, \langle(2,0), j\rangle, \langle(2,0), n\rangle, \ldots\}$, $P(\langle\rangle) = 1$, $P(h) = 2$ für alle $h \in H \setminus Z$ mit $h \neq \langle\rangle$ und $u_1(\langle(2,0), j\rangle) = 2$, $u_2(\langle(2,0), j\rangle) = 0$, usw.

Notation 50. Sei $h = \langle a^1, \ldots, a^k\rangle$ eine Historie und a eine Aktion. Dann ist (h, a) die Historie $\langle a^1, \ldots, a^k, a\rangle$. Falls $h' = \langle b^1, \ldots, b^l\rangle$, dann ist $(h, h') := \langle a^1, \ldots, a^k, b^1, \ldots, b^l\rangle$. Die Menge der Aktionen, aus denen der Spieler $P(h)$ nach einer Historie $h \in H \setminus Z$ auswählen kann, notieren wir als

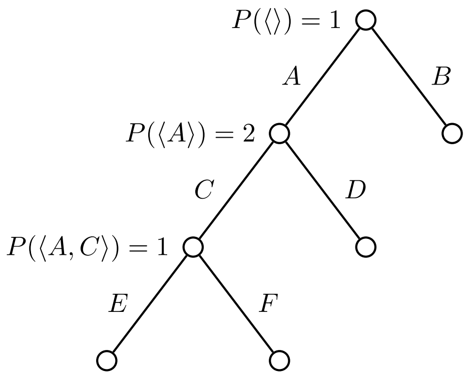
$$A(h) = \{ a \mid (h, a) \in H \}.$$

5.2 Strategien in extensiven Spielen

Definition 51 (Strategie in extensiven Spielen mit perfekter Information)**.** Eine **Strategie** eines Spielers i in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ist eine Funktion s_i, die jeder Historie $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ eine Aktion aus $A(h)$ zuweist.

Notation 52 (für endliche Spiele)**.** Eine Strategie für einen Spieler wird notiert als Folge von Aktionen an Entscheidungspunkten, die in Breitensuche-Reihenfolge besucht werden.

Beispiel 53. Strategienotation in einem endlichen Spiel:



Die Strategien für Spieler 1 sind AE, AF, BE und BF, die Strategien für Spieler 2 sind C und D.

Man notiert auf jeden Fall für jeden einzelnen Knoten die Entscheidung, also auch für Kombinationen, die nie entstehen können. Man betrachtet diese Teilstrategien mit, da der andere Spieler die Strategie auch ändern könnte. Man kann eine Strategie als Programm auffassen, das definiert, was an jedem Punkt zu tun ist.

Definition 54 (Ergebnis)**.** Das **Ergebnis** $O(s)$ für ein Strategieprofil $s = (s_i)_{i \in N}$ ist die, möglicherweise unendliche, terminale Historie $h = \langle a^i \rangle_{i=1}^k$ (mit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), für die gilt, dass für alle $l \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq l < k$:

$$s_{P(\langle a^1,\ldots,a^l \rangle)}(\langle a^1, \ldots, a^l \rangle) = a^{l+1}.$$

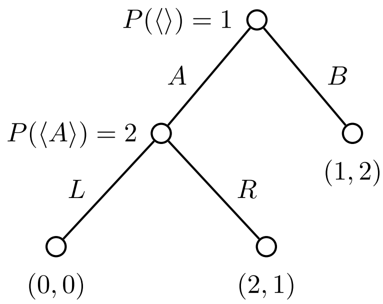
5.3 Nash-Gleichgewichte in extensiven Spielen

Definition 55 (Nash-Gleichgewicht in extensiven Spielen mit perfekter Information)**.** Ein **Nash-Gleichgewicht** in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist ein Strategieprofil s^*, so dass für jeden Spieler $i \in N$ und für alle Strategien s_i gilt, dass

$$u_i(O(s^*_{-i}, s^*_i)) \geq u_i(O(s^*_{-i}, s_i)).$$

Äquivalent kann man die **strategische Form** von extensiven Spielen definieren.

Beispiel 56. Betrachte das durch den folgenden Spielbaum beschriebene extensive Spiel mit perfekter Information.



Spieler 1 hat die Strategien A und B, Spieler 2 die Strategien L und R zur Auswahl. Die strategische Form dieses Spieles ist

		Spieler 2	
		L	R
Spieler 1	A	$0,0$	$2,1$
	B	$1,2$	$1,2$

Die Nash-Gleichgewichte der strategischen Form sind (B, L) und (A, R). Das Nash-Gleichgewicht (B, L) ist jedoch unrealistisch: Spieler 1 spielt hier B, weil dies optimal ist, unter der Bedingung, dass Spieler 2 L spielt. Tatsächlich würde Spieler 2 jedoch in der Situation, in der er zwischen L und R entscheiden muss, niemals L spielen, da er sich dadurch selbst schlechter stellen würde. Man bezeichnet L daher als „leere“ oder „unplausible Drohung“.

Ebenso tritt das Phänomen der „leeren Drohungen“ beim Aufteilungsspiel auf: die Nash-Gleichgewichte der strategischen Form sind $((2,0), jjj)$, $((2,0), jjn)$, $((2,0), jnj)$, $((2,0), jnn)$, $((1,1), njj)$, $((1,1), njn)$, $((0,2), nnj)$, $((2,0), nnj)$ und $((2,0), nnn)$. Bis auf $((2,0), jjj)$ und $((1,1), njj)$ enthalten alle Nash-Gleichgewichte „leere Drohungen“.

5.4 Teilspielperfekte Gleichgewichte

Idee: um Gleichgewichte mit leeren Drohungen auszuschließen, fordert man, dass die Strategien nicht nur in der strategischen Form des gesamten Spieles, sondern auch in der jedes Teilspiels im Gleichgewicht sind.

Definition 57 (Teilspiel)**.** Ein **Teilspiel** eines extensiven Spiels mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$, das nach der Historie h beginnt, ist das Spiel $\Gamma(h) = \langle N, H|_h, P|_h, (u_i|_h) \rangle$, wobei $H|_h = \{ h' \mid (h, h') \in H \}$, $P|_h(h') = P(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$ und $u_i|_h(h') = u_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$.

Für eine Strategie s_i und Historie h des Spiels Γ sei $s_i|_h$ die durch s_i induzierte Strategie für $\Gamma(h)$, genauer $s_i|_h(h') = s_i(h, h')$ für alle $h' \in H|_h$. O_h ist die Ergebnisfunktion für $\Gamma(h)$.

Definition 58 (Teilspielperfektes Gleichgewicht)**.** Ein **teilspielperfektes Gleichgewicht (TPG)** in einem extensiven Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ist ein Strategieprofil s^*, so dass für jeden Spieler i und für jede nicht-terminale Historie $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = i$ gilt:

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$.

Beispiel 59. Betrachte das extensive Spiel aus Beispiel 56. Die strategische Form dieses Spieles besitzt zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich (A, R) und (B, L). Betrachte zunächst (A, R): in der Historie $h = A$ ist die auf das Teilspiel eingeschränkte Strategiekombination teilspielperfekt, da Spieler 2 dann R wählt. In der Historie $h = \langle\rangle$ erhält Spieler 1 den Nutzen 1 bei Wahl von B und den Nutzen 2 bei Wahl von A; also ist (A, R) ein teilspielperfektes Gleichgewicht.

Betrachte nun (B, L): dieses Strategieprofil ist nicht teilspielperfekt, da L in der Historie $h = \langle A \rangle$ nicht den Nutzen von Spieler 2 maximiert.

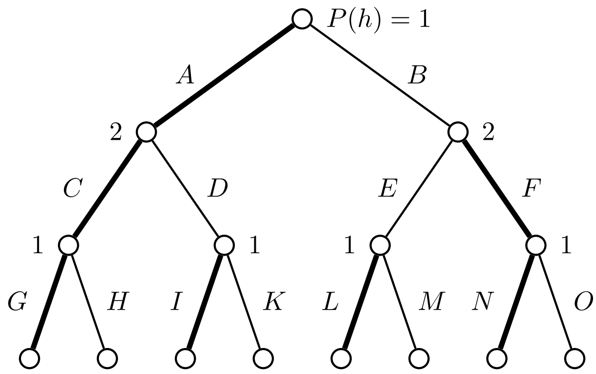
Beispiel 60. Betrachte das Verteilungsspiel aus Beispiel 49. Es gibt drei echte Teilspiele, in denen jeweils Spieler 2 am Zug ist. Nach der Historie $(2, 0)$ sind sowohl j als auch n teilspielperfekt, nach $(1, 1)$ und $(0, 2)$ jeweils nur j. Für das gesamte Spiel kommen also nur Strategieprofile in Frage, bei denen Spieler 2 eine der Strategien jjj oder njj spielt. Davon sind $((2,0), jjj)$ und $((1,1), njj)$ teilspielperfekte Gleichgewichte, $((2,0), njj)$, $((1,1), jjj)$, $((0,2), njj)$ und $((0,2), jjj)$ nicht.

Lemma 14 (Ein-Schritt-Abweichung)**.** *Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i) \rangle$ ein extensives Spiel mit perfekter Information und* endlichem Horizont*. Das Strategieprofil s^* ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht von Γ gdw. für jeden Spieler $i \in N$ und jede Historie $h \in H$ mit $P(h) = i$ gilt:*

$$u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s^*_i|_h)) \geq u_i|_h(O_h(s^*_{-i}|_h, s_i))$$

für jede Strategie s_i des Spielers i im Teilspiel $\Gamma(h)$, die sich von $s_i^*|_h$ nur in der Aktion unterscheidet, die direkt nach der initialen Historie von $\Gamma(h)$ vorgeschrieben wird.

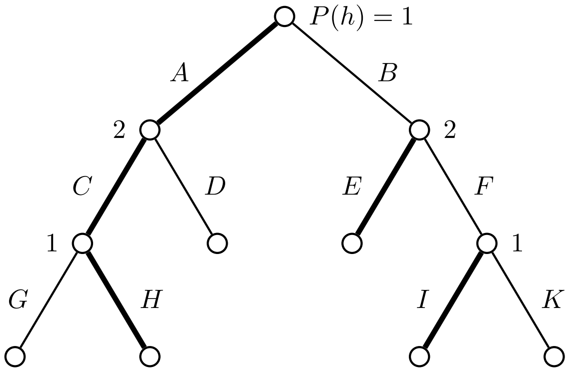
Beweis. Falls s^* ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, gilt die Eigenschaft natürlich. Angenommen, s^* ist kein teilspielperfektes Gleichgewicht. Dann existieren eine Historie h und ein Spieler i so, dass es eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass die Anzahl der Historien h' mit der Eigenschaft, dass $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ ist, höchstens so groß wie die Länge der längsten Historie in $\Gamma(h)$ ist. Diese Annahme ist erlaubt, da es zu jeder profitablen Abweichung s_i von $s_i^*|_h$ eines Spielers i eine profitable Abweichung $\tilde{s_i}$ dieses Spielers gibt, bei der alle Historien h' mit $\tilde{s_i}(h') \neq s_i^*|_h(h')$ auf *einem* Pfad des Spielbaumes liegen. Betrachte dazu etwa die folgende Visualisierung, wobei $s_1^*|_h = AGILN$ und $s_2^*|_h = CF$:



Angenommen, $s_1 = BHKMO$ ist eine profitable Abweichung von Spieler 1. Dann ist auch $\tilde{s_1} = BGILO$ eine profitable Abweichung. $\tilde{s_1}$ unterscheidet sich aber nur an zwei Historien von $s_1^*|_h$, während die längste Historie in $\Gamma(h)$ die Länge drei hat.

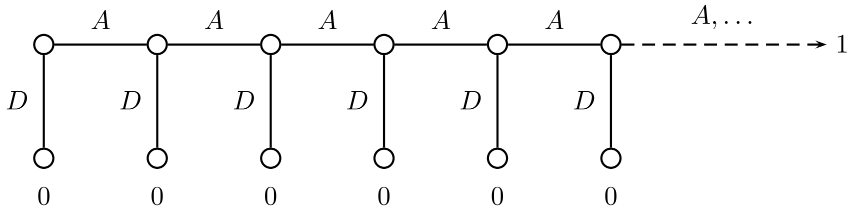
Wegen des endlichen Horizonts von Γ ist diese Anzahl der Historien h' mit der Eigenschaft, dass $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ ist, endlich. Wähle also eine profitable Abweichung s_i in $\Gamma(h)$ so, dass die Anzahl der Historien h' mit $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ minimal ist. Sei dann h^* die längste Historie in $\Gamma(h)$ mit $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$. Dann ist die initiale Historie in $\Gamma(h, h^*)$ die einzige, an der sich $s_i|_{h^*}$ von $s_i^*|_{(h,h^*)}$ unterscheidet. Außerdem ist $s_i|_{h^*}$ eine profitable Abweichung in $\Gamma(h, h^*)$, da wir gefordert haben, dass h^* die *längste* Historie in $\Gamma(h)$ mit $s_i(h') \neq s_i^*|_h(h')$ ist, d.h. $\Gamma(h, h^*)$ ist das gesuchte Teilspiel. $\square$

Beispiel 61. Betrachte das folgende extensive Spiel mit perfekter Information Γ:



Will man zeigen, dass das Profil (AHI, CE) ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, so genügt es, für Spieler 1 die abweichenden Strategien G im Teilspiel $\Gamma(\langle A, C\rangle)$, K im Teilspiel $\Gamma(\langle B, F\rangle)$ und BHI in Γ sowie für Spieler 2 die abweichenden Strategien D im Teilspiel $\Gamma(\langle A\rangle)$ und F im Teilspiel $\Gamma(\langle B\rangle)$ zu betrachten. Insbesondere ist es z. B. nicht notwendig, die abweichende Strategie BGK von Spieler 1 in Γ auf Profitabilität zu untersuchen.

Bemerkung 62. Die entsprechende Aussage für Spiele ohne endlichen Horizont gilt nicht. Betrachte etwa das folgende Ein-Spieler-Spiel:



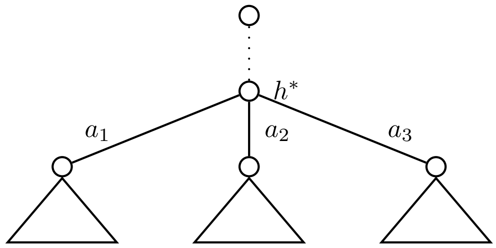
Die Strategie s_i mit $s_i(h) = D$ für alle $h \in H \setminus Z$ ist kein teilspielperfektes Gleichgewicht, da sie von der Strategie s_i^* mit $s_i^*(h) = A$ für alle $h \in H \setminus Z$ dominiert wird, erfüllt jedoch die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft, denn für jedes Teilspiel gilt, dass der Spieler keine bessere Auszahlung erhalten kann, wenn er nur den ersten Schritt ändert.

Definition 63. Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein extensives Spiel mit perfekter Information und endlichem Horizont. Dann bezeichnet $\ell(\Gamma)$ die Länge der längsten Historie von Γ, d.h. $\ell(\Gamma) = \max\{\, |h| \mid h \in H\,\}$.

Satz 15 (Satz von Kuhn)**.** *Jedes endliche extensive Spiel mit perfekter Information hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht.*

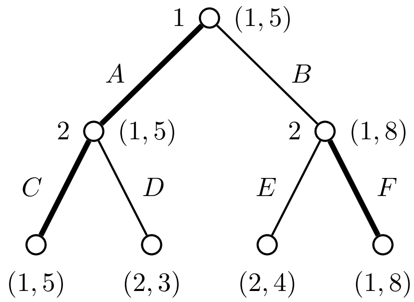
Beweis. Sei $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$ ein endliches extensives Spiel mit perfekter Information. Konstruiere ein teilspielperfektes Gleichgewicht durch Induktion über die Länge $\ell(\Gamma(h))$ für alle Teilspiele $\Gamma(h)$. Konstruiere parallel dazu Funktionen $t_i : H \to \mathbb{R}$ für alle Spieler $i \in N$ so, dass $t_i(h)$ die Auszahlung für Spieler i in einem teilspielperfekten Gleichgewicht im Teilspiel $\Gamma(h)$ angibt.

Falls $\ell(\Gamma(h)) = 0$, dann ist $t_i(h) = u_i(h)$ für alle $i \in N$. Sei $t_i(h)$ für alle $h \in H$ mit $\ell(\Gamma(h)) \leq k$ bereits definiert. Betrachte nun $h^* \in H$ mit $\ell(\Gamma(h^*)) = k + 1$ und $P(h^*) = i$.



Für alle $a \in A(h^*)$ ist $\ell(\Gamma(h^*, a)) \leq k$. Setze $s_i(h^*) := \operatorname{argmax}_{a \in A(h^*)} t_i(h^*, a)$ und $t_j(h^*) := t_j(h^*, s_i(h^*))$ für alle $j \in N$. Induktiv erhalten wir dabei ein Strategieprofil s, das die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft erfüllt. Mit dem vorigen Lemma 14 folgt, dass das Strategieprofil s ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist. □

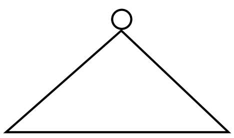
Beispiel 64. Betrachte den Spielbaum



Hier sind $s_2(\langle A\rangle) = C$, $t_1(\langle A\rangle) = 1$, $t_2(\langle A\rangle) = 5$, $s_2(\langle B\rangle) = F$, $t_1(\langle B\rangle) = 1$, $t_2(\langle B\rangle) = 8$ sowie etwa $s_1(\langle\rangle) = A$, $t_1(\langle\rangle) = 1$ und $t_2(\langle\rangle) = 5$.

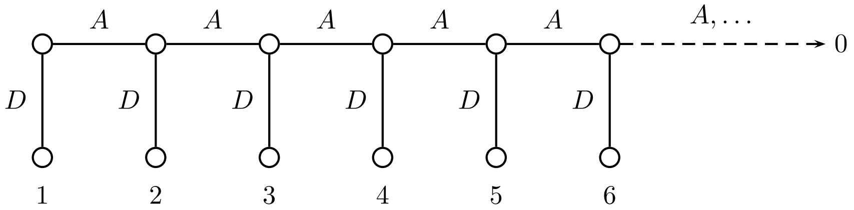
Bemerkung 65. Die entsprechende Aussage gilt nicht für unendliche Spiele.

1. Das folgende Ein-Personen-Spiel besitzt einen endlichen Horizont, aber einen unendlichen Verzweigungsgrad, nämlich unendlich viele Aktionen $a \in A = [0, 1)$ mit Auszahlungen $u_1(\langle a\rangle) = a$ für alle $a \in A$. Es besitzt kein teilspielperfektes Gleichgewicht.



Intervall $[0, 1)$

2. Auch bei unendlichem Horizont, aber endlichem Verzweigungsgrad muss kein teilspielperfektes Gleichgewicht existieren, wie das folgende Beispiel zeigt, wobei $u_1(AAA\ldots) = 0$ und $u_1(\underbrace{AA\ldots A}_{n}D) = n + 1$.



Beachte außerdem, dass der Satz von Kuhn nichts über die Eindeutigkeit teilspielperfekter Gleichgewichte aussagt. Falls keine zwei Historien von einem Spieler gleich bewertet werden, dann ist das TPG jedoch eindeutig.

5.5 Zwei Erweiterungen

5.5.1 Zufall

Definition 66 (Extensives Spiel mit perfekter Information und Zufallszügen)**.** Ein **extensives Spiel mit perfekter Information und Zufallszügen** ist ein Tupel $\Gamma = \langle N, H, P, f_c, (u_i) \rangle$, wobei N, H und u_i wie bei extensiven Spielen definiert sind, die Spielerfunktion $P : H \setminus Z \to N \cup \{ c \}$ auch den Wert c für einen Zufallsknoten annehmen kann, und für jedes $h \in H \setminus Z$ mit $P(h) = c$ die Funktion $f_c(\cdot|h)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $A(h)$ ist, wobei die Wahrscheinlichkeitsmaße $f_c(\cdot|h)$ für alle $h \in H$ unabhängig voneinander sind.

Strategien in extensiven Spielen mit perfekter Information und Zufallszügen sind wie zuvor definiert. Der Ausgang eines Spieles bei gegebenem Strategieprofil ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß über der Menge der terminalen Historien und U_i ist die erwartete Auszahlung für Spieler i.

Bemerkung 67. Die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft und der Satz von Kuhn gelten weiterhin. Beim Beweis des Satzes von Kuhn muss man nun mit dem *erwarteten* Nutzen arbeiten.

5.5.2 Simultane Züge

Definition 68 (Simultane Züge)**.** Ein **extensives Spiel mit perfekter Information und simultanen Zügen** ist ein Tupel $\langle N, H, P, (u_i) \rangle$, wobei N, H und (u_i) wie zuvor definiert sind und $P : H \to \mathrm{Pot}(N)$ jeder nichtterminalen Historie eine *Menge* von Spielern zuordnet. Für alle $h \in H \setminus Z$ existiert eine Familie $(A_i(h))_{i \in P(h)}$ so, dass

$$A(h) = \{ a \mid (h, a) \in H \} = \prod_{i \in P(h)} A_i(h).$$

Die beabsichtigte Interpretation simultaner Züge ist, dass alle Spieler aus $P(h)$ gleichzeitig ziehen. Strategien sind dann Funktionen $s_i : h \mapsto a_i$ mit $a_i \in A_i(h)$, Historien sind Sequenzen von Vektoren von Aktionen. In der Definition teilspielperfekter Gleichgewichte muss die Bedingung $P(h) = i$ durch $i \in P(h)$ ersetzt werden.

Bemerkung 69. Der Satz von Kuhn gilt nicht mehr, da zum Beispiel das Matching-Pennies-Spiel auch ein extensives Spiel mit perfekter Information und mit simultanen Zügen ist.

Beispiel 70 (Kuchenverteilspiel)**.** Das Kuchenverteilspiel für 3 Spieler funktioniert wie folgt: zunächst schlägt Spieler 1 vor, wie der Kuchen unter den Spielern aufgeteilt werden soll. Dazu ordnet er jedem Spieler $i \in \{1, 2, 3\}$ einen Anteil $x_i \in [0, 1]$ zu.

Danach entscheiden sich die anderen Spieler *gleichzeitig* und unabhängig voneinander, ob sie mit dieser Aufteilung einverstanden sind. Sie können die Aufteilung entweder akzeptieren (J) oder ablehnen (N).

Wenn alle anderen Spieler die Aufteilung akzeptieren, erhält jeder Spieler $i \in \{1, 2, 3\}$ den ihm zugewiesenen Anteil des Kuchens (Nutzen x_i). Anderenfalls diskutieren die Spieler, bis der Kuchen vergammelt (Nutzen 0).

Formal ergibt sich das folgende extensive Spiel mit perfekter Information und simultanen Zügen: $\Gamma = \langle N, H, P, (u_i)\rangle$, wobei $N = \{1, 2, 3\}$, $H = \{\langle\rangle\} \cup \{\langle x\rangle \mid x \in X\} \cup \{\langle x, y\rangle \mid x \in X, y \in \{J, N\} \times \{J, N\}\}$ mit $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i = 1\}$. Außerdem ist $P(\langle\rangle) = \{1\}$ und $P(\langle x\rangle) = \{2, 3\}$ für alle $x \in X$ sowie $u_i(\langle x, y\rangle) = 0$, falls $y \in \{(J, N), (N, J), (N, N)\}$ und $u_i(\langle x, y\rangle) = x_i$, falls $y = (J, J)$.

Die teilspielperfekten Gleichgewichte in Γ lassen sich wie folgt bestimmen: wir betrachten zunächst die Teilspiele, die sich ergeben, nachdem Spieler 1 eine Aufteilung $x = (x_1, x_2, x_3)$ gewählt hat. X ist die Menge aller legalen Aufteilungen.

In allen solchen Teilspielen gibt es mindestens zwei Nash-Gleichgewichte, nämlich (J, J) (beide Spieler akzeptieren die Aufteilung) und (N, N) (keiner der beiden Spieler akzeptiert die Aufteilung). Zusätzlich gibt es in den Teilspielen mit $x_2 = 0$ das Gleichgewicht (N, J) (nur Spieler 3 akzeptiert die Aufteilung) und in den Teilspielen mit $x_3 = 0$ das Gleichgewicht (J, N) (nur Spieler 2 akzeptiert die Aufteilung).

Seien nun s_2 und s_3 beliebige Strategien für die Spieler 2 bzw. 3, so dass für alle Aufteilungen $x \in X$ das Profil $(s_2(\langle x\rangle), s_3(\langle x\rangle))$ eines der oben beschriebenen Nash-Gleichgewichte ist.

Sei ferner $X_J = \{x \in X \mid s_2(\langle x\rangle) = s_3(\langle x\rangle) = J\}$ die Menge der akzeptierten Aufteilungen unter s_2 und s_3. Dann unterscheiden wir drei Fälle:

1. $X_J = \varnothing$ oder $x_1 = 0$ für alle $x \in X_J$. Dann ist (s_1, s_2, s_3) für beliebig gewähltes s_1 ein teilspielperfektes Gleichgewicht.
2. $X_J \neq \varnothing$ und es gibt Verteilungen $x_{\max} = (x_1, x_2, x_3) \in X_J$, die $x_1 > 0$ maximieren. Dann ist (s_1, s_2, s_3) genau dann ein teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn $s_1(\langle\rangle)$ eine solche Verteilung $x_{\max}$ ist.
3. $X_J \neq \varnothing$ und es gibt keine Verteilungen $(x_1, x_2, x_3) \in X_J$, die x_1 maximieren. Dann gibt es kein teilspielperfektes Gleichgewicht, bei dem Spieler 2 der Strategie s_2 und Spieler 3 der Strategie s_3 folgt.

6 Mechanismusdesign

Beim Mechanismusdesign handelt es sich um einen Teilbereich der Spieltheorie, bei dem es um die Synthese von Spielen geht. Ziel ist es, eine *soziale Entscheidung* als Lösung eines Spiels zu implementieren, also Spiele so zu definieren, dass deren Lösungen (Gleichgewichte) gerade die gewünschten Ausgänge sind.

Beispiele für soziale Entscheidungen sind Wahlen, das Aufstellen einer Berufungsliste, Auktionen und Festlegungen von Policies.

Nicht immer werden die Präferenzen der beteiligten Personen ehrlich angegeben. Mechanismusdesign implementiert die Bestimmung der sozialen Entscheidungen in einer strategischen Umgebung, in der die Präferenzen der Teilnehmer nicht öffentlich sind.

6.1 Soziale Entscheidungen

Wenn wir über soziale Entscheidungen sprechen, verwenden wir häufig Begriffe aus dem Kontext von Wahlen (Kandidaten, Wähler, ...), müssen dabei aber beachten, dass es neben Wahlen auch andere soziale Entscheidungen gibt.

Definition 71 (Soziale Wohlfahrtsfunktion und soziale Entscheidungsfunktion)**.** Sei A eine Menge von Alternativen (Kandidaten) und L die Menge der linearen Ordnungen über A. Bei n Wählern bezeichnet $F : L^n \to L$ eine **soziale Wohlfahrtsfunktion** und $f : L^n \to A$ eine **soziale Entscheidungsfunktion**.

Notation 72. Eine lineare Ordnung $\prec \in L$ wird als **Präferenzrelation** bezeichnet. Für Wähler $i = 1, \ldots, n$ ist $\prec_i$ die Präferenzrelation dieses Wählers, d. h. $a \prec_i b$ bedeutet, dass Wähler i den Kandidaten b gegenüber Kandidaten a bevorzugt.

Beispiel 73 (Mehrheitsentscheidung)**.** Die Mehrheitsentscheidung funktioniert gut, wenn man nur zwischen zwei Alternativen auszuwählen hat. Der Mechanismus funktioniert jedoch nicht, falls $|A| \geq 3$ ist (Condorcet-Paradoxon, 1785). Seien etwa die Präferenzen der drei Wähler 1, 2 und 3 bezüglich der drei Kandidaten a, b und c wie folgt:

$$\begin{gathered} a \prec_1 b \prec_1 c \\ b \prec_2 c \prec_2 a \\ c \prec_3 a \prec_3 b \end{gathered}$$

Dann bevorzugt eine relative Mehrheit der Wähler (nämlich Wähler 1 und 3) Kandidaten b gebenüber a, eine relative Mehrheit (nämlich Wähler 1 und 2) Kandidaten c gegenüber b und eine relative Mehrheit (nämlich Wähler 2 und 3) Kandidaten a gegenüber c. Würde man daraus ableiten, dass auch $a \prec b$, $b \prec c$ und $c \prec a$ gelten müsste, so würde mit der Transitivität von $\prec$ auch $a \prec a$ folgen, was nicht möglich ist, eine solche Definition wäre also inkonsistent. Ganz gleich, welcher der drei Kandidaten schließlich gewählt wird, es gibt immer eine Mehrheit der Wähler, die einen gemeinsamen anderen Kandidaten dem gewählten vorziehen würde.

Neben der Mehrheitsentscheidung gibt es noch eine Reihe von alternativen Methoden. Dazu zählt das **Borda-Wahlverfahren**, bei dem jeder der m Kandidaten vom i-ten Wähler $m-j$ Punkte erhält, wenn er ihn auf Platz j gewählt hat, wenn also der Kandidat in $\prec_i$ an j-ter Stelle steht, und wo schließlich für jeden Kandidaten die Punkte, die er von den Wählern erhalten hat, addiert werden. Daneben gibt es das **Pluralitätsverfahren**, bei dem der Kandidat gewinnt, der bei den meisten Wählern auf dem ersten Platz liegt.

Generelle Fragen, die sich nun stellen, sind die Frage, ob es ein „vernünftiges“ Wahlverfahren gibt und wie resistent einzelne Verfahren gegen Manipulierbarkeit sind.

6.2 Arrows Unmöglichkeitsresultat

Arrow postuliert die folgenden Eigenschaften für soziale Wohlfahrtsfunktionen:

1) Totale Einstimmigkeit: Für alle $\prec \in L$ gilt $F(\prec, \dots, \prec) = \prec$.

1') Partielle Einstimmigkeit: Für alle $\prec_1, \prec_2, \dots, \prec_n, \prec \in L$ mit $F(\prec_1, \dots, \prec_n) = \prec$ folgt aus $a \prec_i b$ für alle $i = 1, \dots, n$, dass auch $a \prec b$ gilt.

2) Nicht-diktatorische Entscheidung: Ein Wähler i heißt **Diktator** für eine soziale Wohlfahrtsfunktion F, falls für alle Ordnungen $\prec_1, \dots, \prec_n \in L$ gilt, dass $F(\prec_1, \dots, \prec_i, \dots, \prec_n) = \prec_i$. F heißt **nicht-diktatorisch**, falls es keinen Diktator für F gibt.

3) Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen (UIA): Ob $a \prec b$ gilt, sollte nur von den Präferenzen der Wähler zwischen a und b abhängen, d. h. für alle $\prec_1, \dots, \prec_n$, $\prec'_1, \dots, \prec'_n \in L$ muss gelten: Falls $\prec = F(\prec_1, \dots, \prec_n)$ und $\prec' = F(\prec'_1, \dots, \prec'_n)$ und $a \prec_i b$ gdw. $a \prec'_i b$ für alle $i = 1, \dots, n$, so impliziert dies, dass $a \prec b$ gdw. $a \prec' b$.

Bemerkung 74. Partielle Einstimmigkeit (1') impliziert totale Einstimmigkeit (1), aber nicht umgekehrt.

Proposition 16. *Aus totaler Einstimmigkeit und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen folgt partielle Einstimmigkeit.*

Beweis. Seien $\prec_1, \dots, \prec_n \in L$ gegeben mit $a \prec_i b$ für alle Wähler i. Sei $\prec = F(\prec_1, \dots, \prec_n)$. Betrachte $\prec'_1, \dots, \prec'_n$ mit $\prec'_i = \prec_1$ für alle Wähler i. Offensichtlich gilt mit der totalen Einstimmigkeit, dass $\prec' = F(\prec'_1, \dots, \prec'_n) = F(\prec_1, \dots, \prec_1) = \prec_1$. Also haben wir $a \prec' b$. Da $a \prec_i b$ gdw. $a \prec'_i b$ gilt, folgt mit der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, dass auch $a \prec b$ gdw. $a \prec' b$ gelten muss. Da wir wissen, dass $a \prec' b$ gilt, muss auch $a \prec b$ gelten. □

Lemma 17 (Paarweise Neutralität)**.** *Die soziale Wohlfahrtsfunktion F erfülle (totale bzw. partielle) Einstimmigkeit und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen. Seien $\prec_1, \dots, \prec_n$ und $\prec'_1, \dots, \prec'_n$ zwei Präferenzprofile mit $a \prec_i b$ gdw. $c \prec'_i d$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann gilt $a \prec b$ gdw. $c \prec' d$, wenn $\prec = F(\prec_1, \dots, \prec_n)$ und $\prec' = F(\prec'_1, \dots, \prec'_n)$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $a \prec b$ (sonst benenne die Kandidaten a und b um) und $b \neq c$ (sonst benenne a und c sowie b und d um). Wir konstruieren ein neues Präferenzprofil $\prec''_1, \ldots, \prec''_n$. Dabei sei $c \prec''_i a$ und $b \prec''_i d$ für alle $i = 1, \ldots, n$, während die Ordnung der Paare (a, b) aus $\prec_i$ und (c, d) aus $\prec'_i$ übernommen wird.

Wegen der Einstimmigkeit folgt $c \prec'' a$ und $b \prec'' d$ für $\prec'' = F(\prec''_1, \ldots, \prec''_n)$. Wegen der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen gilt $a \prec'' b$. Dann folgt mit Transitivität, dass $c \prec'' d$. Mit der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen folgt schließlich, dass $c \prec' d$.

Die Rückrichtung der Äquivalenz wird analog bewiesen. □

Beispiel 75. Dieses Beispiel illustriert die Konstruktion des Präferenzprofils $\prec''_1, \ldots, \prec''_n$ im obigen Beweis. Gelte etwa

$$\begin{aligned} &e \prec_i a \prec_i c \prec_i b \prec_i f \\ &g \prec'_i a \prec'_i f \prec'_i c \prec'_i d \end{aligned}$$

Dann könnte $\prec''_i$ die Alternativen a, b, c und d etwa so anordnen:

$$\cdots \prec''_i c \prec''_i \cdots \prec''_i a \prec''_i \cdots \prec''_i b \prec''_i \cdots \prec''_i d \prec''_i \ldots$$

Insbesondere wäre also $a \prec''_i b$ und $c \prec''_i d$.

Satz 18 (Arrows Unmöglichkeitssatz)**.** *Jede soziale Wohlfahrtsfunktion über einer Menge von mehr als zwei Alternativen, die Einstimmigkeit und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt, ist diktatorisch.*

Beweis. Betrachte zwei Elemente $a, b \in A$ mit $a \neq b$ und konstruiere eine Folge $(\pi^i)_{i=0,\ldots,n}$ von Präferenzprofilen, so dass in π^i genau die ersten i Wähler b vor a präferieren, d. h. $a \prec_j b$ gdw. $j \leq i$:

	π^0	$\ldots$	π^{i^*-1}	π^{i^*}	$\ldots$	π^n
$1:$	$b \prec_1 a$	$\ldots$	$a \prec_1 b$	$a \prec_1 b$	$\ldots$	$a \prec_1 b$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$i^*-1:$	$b \prec_{i^*-1} a$	$\ldots$	$a \prec_{i^*-1} b$	$a \prec_{i^*-1} b$	$\ldots$	$a \prec_{i^*-1} b$
$i^*:$	$b \prec_{i^*} a$	$\ldots$	$b \prec_{i^*} a$	$a \prec_{i^*} b$	$\ldots$	$a \prec_{i^*} b$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$n:$	$b \prec_n a$	$\ldots$	$b \prec_n a$	$b \prec_n a$	$\ldots$	$a \prec_n b$
$F:$	$b \prec^0 a$	$\ldots$	$b \prec^{i^*-1} a$	$a \prec^{i^*} b$	$\ldots$	$a \prec^n b$

Wegen der Einstimmigkeit gilt für $\prec^0 = F(\pi^0)$, dass $b \prec^0 a$, und für $\prec^n = F(\pi^n)$ gilt, dass $a \prec^n b$. Also muss es einen minimalen Index i^* geben, so dass $b \prec^{i^*-1} a$ und $a \prec^{i^*} b$, wenn $\prec^{i^*-1} = F(\pi^{i^*-1})$ und $\prec^{i^*} = F(\pi^{i^*})$. Wir zeigen, dass i^* ein Diktator ist. Betrachte zwei Elemente $c, d \in A$ mit $c \neq d$. Wir werden zeigen, dass $c \prec_{i^*} d$ impliziert, dass $c \prec d$, wenn $\prec = F(\prec_1, \ldots, \prec_{i^*}, \ldots, \prec_n)$ für beliebige $\prec_1, \ldots, \prec_n \in L$. Betrachte $e \notin \{c, d\}$ und konstruiere ein Präferenzprofil $\prec'_1, \ldots, \prec'_n$, wobei

$$\begin{aligned} &\text{für } j < i^* \text{ gilt } e \prec'_j c \prec'_j d \text{ bzw. } e \prec'_j d \prec'_j c, \\ &\text{für } j = i^* \text{ gilt } c \prec'_j e \prec'_j d \text{ bzw. } d \prec'_j e \prec'_j c, \\ &\text{für } j > i^* \text{ gilt } c \prec'_j d \prec'_j e \text{ bzw. } d \prec'_j c \prec'_j e, \end{aligned}$$

jeweils je nachdem, ob $c \prec_j d$ oder $d \prec_j c$.

Wegen der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen gilt für $\prec' = F(\prec'_1, \ldots, \prec'_n)$, dass $c \prec' d$ gdw. $c \prec d$. Für (e, d) haben wir die gleichen Präferenzen in $\prec'_1, \ldots, \prec'_n$ wie in π^{i^*} für das Paar (a, b) (s.u.). Für $j \neq i^*$ gilt das unabhängig davon, ob $c \prec_j d$ oder $d \prec_j c$, für $j = i^*$ gilt nach Voraussetzung $c \prec_j d$ und damit nach Definition $e \prec'_j d$. Wegen der paarweisen Neutralität folgt deshalb, dass $e \prec' d$. Entsprechend haben wir in $\prec'_1, \ldots, \prec'_n$ für (e, c) die gleichen Präferenzen wie für (a, b) in dem Profil π^{i^*-1}. Wegen der paarweisen Neutralität folgt deshalb, dass $c \prec' e$.

	π^{i^*-1}	$(\prec'_i)_{i=1,\ldots,n}$	π^{i^*}	$(\prec'_i)_{i=1,\ldots,n}$
$1:$	$a \prec_1 b$	$e \prec_1 c$	$a \prec_1 b$	$e \prec_1 d$
$i^* - 1:$	$a \prec_{i^*-1} b$	$e \prec_{i^*-1} c$	$a \prec_{i^*-1} b$	$e \prec_{i^*-1} d$
$i^*:$	$b \prec_{i^*} a$	$c \prec_{i^*} e$	$a \prec_{i^*} b$	$e \prec_{i^*} d$
$n:$	$b \prec_n a$	$c \prec_n e$	$b \prec_n a$	$d \prec_n e$
$F:$	$b \prec^{i^*-1} a$	$c \prec' e$	$a \prec^{i^*} b$	$e \prec' d$

Mit Transitivität folgt $c \prec' d$. Nach Konstruktion von $\prec'$ und mit der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen folgt, dass $c \prec d$ gilt, was zu zeigen war. Der Beweis der Rückrichtung ist analog. $\square$

Nach dem Satz von Arrow ist jede soziale Wohlfahrtsfunktion über einer Menge von mehr als zwei Alternativen, die Einstimmigkeit und Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen erfüllt, diktatorisch. Viele soziale Wohlfahrtsfunktionen sind jedoch keine Diktaturen und erfüllen die Einstimmigkeitsforderung. Das Problem liegt daher häufig bei der Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen. Diese wiederum hängt eng mit der Nicht-Manipulierbarkeit zusammen, da das Einfügen von irrelevanten Alternativen zwischen dem bevorzugten Kandidaten und dessen Hauptkonkurrenten bei vielen sozialen Wohlfahrtsfunktionen das Ergebnis zugunsten des bevorzugten Kandidaten beeinflussen kann, auch wenn man dessen künstlich in der Angabe der eigenen Präferenzen nach unten gesetzten Hauptkonkurrenten eigentlich gegenüber den dazwischengesetzten dritten Kandidaten bevorzugt.

Es stellt sich die Frage, ob sich Arrows negatives Resultat auch auf sozialen *Entscheidungs*funktionen übertragen lässt und ob ein Zusammenhang zu Arrows Ergebnis besteht.

6.3 Resultat von Gibbard und Satterthwaite

Intuitiv besagt das Resultat von Gibbard und Satterthwaite, dass alle vernünftigen sozialen Entscheidungsfunktionen manipulierbar sind. Dabei ist eine soziale Entscheidungsfunktion manipulierbar, wenn ein Wähler i, der b vor a präferiert, b erzwingen kann, wenn er statt seiner wahren Präferenz $\prec_i$ eine davon verschiedene Präferenz $\prec'_i$ angibt.

Definition 76 (Strategische Manipulation, Anreizkompatibilität)**.** Eine soziale Entscheidungsfunktion kann durch Wähler i **strategisch manipuliert** werden, falls es Präferenzen $\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n, \prec'_i \in L$ gibt, so dass $a \prec_i b$ gilt für $a = f(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n)$ und $b = f(\prec_1, \ldots, \prec'_i, \ldots, \prec_n)$. Die Funktion f heißt **anreizkompatibel**, falls f nicht strategisch manipulierbar ist.

Eine alternative Charakterisierung desselben Sachverhalts basiert auf der Monotonie von f.

Definition 77 (Monotonie)**.** Eine soziale Entscheidungsfunktion heißt **monoton**, falls aus $f(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n) = a$, $f(\prec_1, \ldots, \prec'_i, \ldots, \prec_n) = b$ und $a \neq b$ folgt, dass $b \prec_i a$ und $a \prec'_i b$.

Satz 19. *Eine soziale Entscheidungsfunktion ist genau dann monoton, wenn sie anreizkompatibel ist.*

Beweis. Sei f monoton. Wann immer $f(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n) = a$, $f(\prec_1, \ldots, \prec'_i, \ldots, \prec_n) = b$ und $a \neq b$ gelten, gilt dann auch $b \prec_i a$ und $a \prec'_i b$. Dann kann es keine $\prec_1, \ldots, \prec_n, \prec'_i \in L$ geben, so dass $f(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n) = a$, $f(\prec_1, \ldots, \prec'_i, \ldots, \prec_n) = b$ und $a \prec_i b$. Umgekehrt zeigt auch verletzte Monotonie, dass eine Manipulationsmöglichkeit vorliegt. □

Der Begriff eines Diktators kann analog zum Diktator für soziale Wohlfahrtsfunktionen auch für soziale Entscheidungsfunktionen definiert werden.

Definition 78 (Diktator)**.** Wähler i heißt **Diktator** in einer sozialen Entscheidungsfunktion f, falls für alle $\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n \in L$ gilt, dass $f(\prec_1, \ldots, \prec_i, \ldots, \prec_n) = a$, wobei a der eindeutig bestimmte Kandidat mit $b \prec_i a$ für alle $b \in A$ mit $b \neq a$ ist. Die Funktion f heißt **diktatorisch**, falls es einen Diktator in f gibt.

Um das Resultat von Gibbard und Satterthwaite zu beweisen, wollen wir auf den bereits bewiesenen Satz von Arrow zurückgreifen. Dazu konstruieren wir aus einer sozialen Entscheidungsfunktion eine soziale Wohlfahrtsfunktion.

Notation 79. Sei $S \subseteq A$ und $\prec \in L$. Mit $\prec^S$ bezeichnen wir dann die Ordnung, die wir erhalten, wenn alle Elemente aus S in $\prec$ „nach oben" geschoben werden, während die Präferenzen der Elemente in S untereinander sowie der Elemente in $A \setminus S$ untereinander beibehalten werden, genauer: Für $a, b \in S$ gilt $a \prec^S b$ gdw. $a \prec b$, für $a, b \notin S$ gilt $a \prec^S b$ gdw. $a \prec b$ und für $a \notin S$, $b \in S$ gilt $a \prec^S b$. Durch diese Bedingungen ist die Ordnung $\prec^S$ eindeutig bestimmt.

Wir wollen zunächst einige technische Lemmata beweisen. Das erste davon besagt, dass für anreizkompatible und surjektive soziale Entscheidungsfunktionen f der gewählte Kandidat zu der Kandidatenmenge S gehört, wenn alle Wähler die Kandidaten aus S an der Spitze ihrer Präferenzlisten haben.

Lemma 20 (Top-Präferenz)**.** *Sei f eine anreizkompatible und surjektive soziale Entscheidungsfunktion. Dann gilt für alle $\prec_1, \ldots, \prec_n \in L$ und alle $\varnothing \neq S \subseteq A$, dass $f(\prec_1^S, \ldots, \prec_n^S) \in S$.*

Beweis. Sei $a \in S$. Da f surjektiv ist, existieren $\prec'_1, \ldots, \prec'_n \in L$, so dass $f(\prec'_1, \ldots, \prec'_n) = a$. Nun ändere schrittweise für $i = 1, \ldots, n$ die Relation $\prec'_i$ zu $\prec_i^S$. Zu keinem Zeitpunkt kann dabei $b \notin S$ als Ergebnis von f entstehen, da f monoton ist. □

Soziale Entscheidungsfunktionen können wie folgt zu sozialen Wohlfahrtsfunktionen erweitert werden.

Definition 80 (Erweiterung einer sozialen Entscheidungsfunktion)**.** Die Funktion $F : L^n \to L$, die die soziale Entscheidungsfunktion f **erweitert**, ist definiert durch:

$$F(\prec_1, \ldots, \prec_n) = \prec, \quad \text{wobei } a \prec b \text{ gdw. } f(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}}) = b \text{ für alle } a, b \in A, a \neq b.$$

Lemma 21. *Falls f eine anreizkompatible und surjektive soziale Entscheidungsfunktion ist, dann ist ihre Erweiterung F eine soziale Wohlfahrtsfunktion.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass die resultierende Relation eine strikte lineare Ordnung ist, also asymmetrisch, total und transitiv.

Asymmetrie und Totalität: Wegen des Top-Präferenz-Lemmas ist $f(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}})$ eines von a oder b, d. h. $a \prec b$ oder $b \prec a$, aber nicht beides (Asymmetrie) und nicht keines von beiden (Totalität).

Transitivität: Wir dürfen die Totalität schon voraussetzen. Angenommen, $\prec$ wäre nicht transitiv, d. h. $a \prec b$ und $b \prec c$, aber nicht $a \prec c$, für geeignete a, b und c. Wegen der Totalität hätten wir dann $c \prec a$. Betrachte $S = \{a, b, c\}$ und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(\prec_1^{\{a,b,c\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b,c\}}) = a$. Wegen der Monotonie von f folgt $f(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}}) = a$ durch schrittweise Änderung von $\prec_i^{\{a,b,c\}}$ zu $\prec_i^{\{a,b\}}$. Also haben wir $b \prec a$ im Widerspruch zur Annahme. □

Lemma 22 (Erweiterungslemma)**.** *Falls f eine anreizkompatible, surjektive und nicht-diktatorische soziale Entscheidungsfunktion ist, so ist ihre Erweiterung F eine soziale Wohlfahrtsfunktion, die Einstimmigkeit, Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen und nicht-diktatorische Entscheidung erfüllt.*

Beweis. Wir wissen schon, dass die Erweiterung eine soziale Wohlfahrtsfunktion ist und müssen noch Einstimmigkeit, Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen und Nicht-Diktatur zeigen.

Einstimmigkeit: Sei $a \prec_i b$ für alle i. Dann ist $(\prec_i^{\{a,b\}})^{\{b\}} = \prec_i^{\{a,b\}}$. Wegen des Top-Präferenz-Lemmas folgt $f(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}}) = b$, also $a \prec b$.

Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen: Falls für alle i gilt, dass $a \prec_i b$ gdw. $a \prec_i' b$, dann muss $f(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}}) = f(\prec_1'^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n'^{\{a,b\}})$ gelten, da sich das Ergebnis wegen der Monotonie nicht ändert, wenn man schrittweise $\prec_i^{\{a,b\}}$ durch $\prec_i'^{\{a,b\}}$ ersetzt.

Nicht-Diktatur: Offensichtlich. □

Nun können wir den Satz von Gibbard-Satterthwaite, das Analogon zum Satz von Arrow für soziale Entscheidungsfunktionen, beweisen, indem wir eine gegebene soziale Entscheidungsfunktion zu einer sozialen Wohlfahrtsfunktion erweitern und auf diese den Satz von Arrow anwenden.

Satz 23 (Satz von Gibbard-Satterthwaite)**.** *Falls f eine anreizkompatible und surjektive soziale Entscheidungsfunktion ist, so dass drei oder mehr Alternativen wählbar sind, dann ist f diktatorisch.* □

Mechanismusdesign versucht, die negativen Resultate von Arrow bzw. Gibbard-Satterthwaite durch Änderungen des Modells zu entschärfen. Die beiden üblicherweise untersuchten Änderungen sind die Einführung von Geld sowie die Einschränkung der zulässigen Präferenzrelationen.

6.4 Exkurs: Eingesetzte Wahlverfahren

In diesem Abschnitt wollen wir einige in der Realität eingesetzte Wahlverfahren vorstellen.

6.4.1 Pluralitätswahl

Definition 81 (Pluralitätswahl)**.** Bei der **Pluralitätswahl** (auch **relative Mehrheitswahl**, first-past-the-post, winner-takes-all) nennt jeder Wähler einen Kandidaten und der Kandidat mit den meisten Stimmen gewinnt.

Zu den Nachteilen der Pluralitätswahl gehört, dass die Präferenzen der „unterlegenen Wähler“ keine Rolle spielen. Der gewählte Kandidat wird im Allgemeinen nur von einer Minderheit gestützt. Das Verfahren ist manipulierbar.

6.4.2 Pluralitätswahl in zwei Runden

Definition 82 (Pluralitätswahl in zwei Runden)**.** Bei der **Pluralitätswahl in zwei Runden mit Stichwahl** wird die erste Runde wie eine gewöhnliche Pluralitätswahl abgehalten, und in der zweiten Runde treten die beiden Kandidaten mit den meisten Stimmen aus der ersten Runde gegeneinander an.

Die Nachteile der Pluralitätswahl in zwei Runden sind ähnlich denen der Pluralitätswahl mit nur einer Runde.

6.4.3 Präferenzwahl mit übertragbaren Stimmen

Definition 83 (Präferenzwahl mit übertragbaren Stimmen)**.** Bei der **Präferenzwahl mit übertragbaren Stimmen** gibt jeder Wähler eine Präferenzliste ab. Dann wird jeweils so lange der Kandidat von der Liste eliminiert, der am wenigsten Erstpräferenzen hat, bis ein Kandidat die Majorität bei den Erstpräferenzen hat.

Die Präferenzwahl mit übertragbaren Stimmen lässt sich am besten an einem Beispiel illustrieren.

Beispiel 84. Angenommen, es findet eine Präferenzwahl mit übertragbaren Stimmen zwischen den drei Kandidaten Anton, Berta und Claus statt. Die Wählerpräferenzen ergeben sich aus der folgenden Tabelle.

Anzahl Wähler	39	14	5	42
Erster in Präferenzliste	A	B	B	C
Zweiter in Präferenzliste	B	A	C	B
Dritter in Präferenzliste	C	C	A	A

Dann hat Kandidat Anton in der ersten Runde 39 Erstpräferenzen, Kandidatin Berta 19 Erstpräferenzen und Kandidat Claus 42 Erstpräferenzen. Also wird Berta gestrichen. Es bleiben die folgenden Präferenzen.

Anzahl Wähler	39	14	5	42
Erster in Präferenzliste	A	A	C	C
Zweiter in Präferenzliste	C	C	A	A

Also hat Anton in der zweiten Runde nun 53 Erstpräferenzen, während Claus 47 Erstpräferenzen hat. Anton gewinnt also die Wahl.

Ein Nachteil dieses Verfahrens ist, dass „Kompromisskandidaten“ keine Chance haben. In Beispiel 84 wäre Berta eine solche Kandidatin, da sowohl für eine Mehrheit der Wähler (nämlich 61 von 100) Anton $\prec_i$ Berta als auch für eine Mehrheit der Wähler (nämlich 58 von 100) Claus $\prec_i$ Berta gilt. Damit wäre Berta eine gute Kompromisskandidatin, obwohl sie nur bei wenigen Wählern auf dem ersten Platz steht.

6.4.4 Condorcet-Methoden

Definition 85 (Condorcet-Methoden)**.** Bei **Condorcet-Methoden** gibt jeder Wähler eine Präferenzliste ab und ein Kandidat gewinnt, wenn er beim paarweisen Vergleich von Kandidaten immer eine Majorität hat.

In Beispiel 84 gewinnt Kandidatin Berta alle paarweisen Vergleiche (61 zu 39 gegen Anton und 58 zu 42 gegen Claus), wäre also bei einem Condorcet-Verfahren gewählt.

Der Hauptnachteil von Condorcet-Methoden ist, dass es wegen des Condorcet-Paradoxons nicht immer einen Sieger gibt. In diesem Fall wendet man spezielle Methoden, wie etwa die Copeland-Methode, an, bei der gezählt wird, wie oft ein Kandidat in paarweisen Vergleichen gewinnt, und der Kandidat, bei dem diese Anzahl am höchsten ist, gewinnt. Auch hier sind noch unentschiedene Situationen möglich. In den beiden folgenden Abschnitten wollten wir zwei weitere Condorcet-Methoden betrachten.

6.4.5 Schulze-Methode

Bei der **Schulze-Methode** handelt es sich um eine Verfeinerung der Condorcet-Methode. Sie wird in vielen Open-Source-Projekten zur internen Entscheidungsfindung eingesetzt.

Sei $d(X, Y)$ die Anzahl der paarweise Vergleichen zwischen X und Y, bei denen X gewonnen hat. Die Schulze-Methode basiert auf Pfaden $C_1, \ldots, C_n$ zwischen Kandidaten X und Y mit der Stärke z. Dabei ist die Stärke einer Kette die ihres schwächsten Gliedes, genauer: $C_1, \ldots, C_n$ ist ein Pfad der Stärke z von X nach Y, wenn

1. $C_1 = X$
2. $C_n = Y$
3. $d(C_i, C_{i+1}) > d(C_{i+1}, C_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$
4. $d(C_i, C_{i+1}) \geq z$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$ und es existiert ein j, so daß $d(C_j, C_{j+1}) = z$.

Wir definieren dann $p(X, Y) = z$ als das maximale z, so dass es einen Pfad der Stärke z von X nach Y gibt, und $p(X, Y) = 0$, falls kein Pfad von X nach Y existiert.

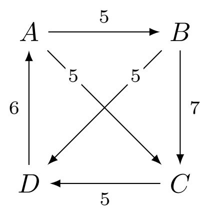
Der Schulze-Gewinner ist der Condorcet-Gewinner, falls ein solcher exisiert, sonst ist ein *potentieller Gewinner* ein Kandidat A, für den gilt, dass $p(A, X) \geq p(X, A)$ für alle Kandidaten $X \neq A$.

Beispiel 86. Gegeben seien die 9 Wählerpräferenzen über den Kandidaten A, B, C, D wie in der linken Tabelle angegeben. Es ergeben sich die paarweisen Vergleiche zwischen den Kandidatenwie in der rechten Tabelle.

	3mal	2mal	2mal	2mal
Erstpräferenz	A	D	D	C
Zweitpräferenz	B	A	B	B
Drittpräferenz	C	B	C	D
Viertpräferenz	D	C	A	A

$d(\cdot,\cdot)$	A	B	C	D
A	$\diagdown$	5	5	3
B	4	$\diagdown$	7	5
C	4	2	$\diagdown$	5
D	6	4	4	$\diagdown$

Die Ergebnisse der paarweisen Vergleiche können wir als Graphen über der Menge der Kandidaten darstellen, in dem zwischen je zwei Kandidaten X und Y genau eine gerichtete Kante existiert, gerichtet vom Gewinner, o.B.d.A X, zum Verlierer, o.B.d.A Y, der Paarung, und beschriftet mit dem Wert $d(X,Y)$ (Abbildung unten links). Die Bestimmung der Werte $p(X,Y)$ geschieht durch die Ermittlung von stärksten Pfaden in diesem Graphen. Im vorliegenden Beispiel erhalten wir die Werte von $p(X,Y)$ wie in der Abbildung unten rechts.



$p(\cdot,\cdot)$	A	B	C	D
A	$\diagdown$	5	5	5
B	5	$\diagdown$	7	5
C	5	5	$\diagdown$	5
D	6	5	5	$\diagdown$

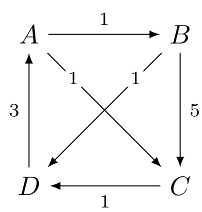
Zur Bestimmung der potentiellen Sieger müssen wir ermitteln für welche Kandidaten A gilt, dass $p(A,X) \geq p(X,A)$ für alle anderen Kandidaten $X \neq A$. Dies sind offensichtlich genau die Kandidaten B und D.

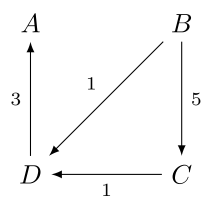
6.4.6 Kemeny-Young-Methode

Mit dem Verfahren von Kemeny-Young gibt es sogar eine Condorcet-Methode (als soziale Wohlfahrts-, nicht Entscheidungsfunktion), bei der der Gewinner NP-schwer zu berechnen ist.

Die **Kemeny-Young-Methode** basiert auf sogenannten Dominanzgraphen, die eine Dominanzkante zwischen A und B mit dem Gewicht $|\{i|A \succ_i B\}| - |\{i|B \succ_i A\}| = d(A,B) - d(B,A)$ enthalten, falls diese Differenz positiv ist.

Beispiel 87. Betrachte die Wählerpräferenzen aus Beispiel 86. Dann erhalten wir den unten links abgebildeten Dominanzgraphen. Entfernt man Kanten mit minimalem Gewicht, so daß der Graph zyklenfrei wird, und sortiert dann eindeutig, so ist der Gewinner ein Meistpräferierter. Wenn wir (A,B) und (A,C) streichen, so haben die entfernten Kanten Gewicht 2. Also gewinnt Kandidat B (vgl. Abbildung unten rechts).





Die Kanten (A, B) und (A, C) zu entfernen ist nur eine Möglichkeit, den Graphen azyklisch zu machen. Weitere Möglichkeiten sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Eliminierte Kanten	**Gewicht**	**Optimal**	**Gewinner**
$(A, B), (A, C)$	2	ja	B
$(A, B), (C, D)$	2	ja	B
$(B, C), (B, D)$	6	nein	
$(B, D), (C, D)$	2	ja	D
$(B, D), (D, A)$	4	nein	
(D, A)	3	nein	

Unter diesen Möglichkeiten sind aber die mit minimalem Gewicht, hier 2, für uns interessant, da das Gesamtgewicht der entfernten Kanten gerade der Anzahl der in der resultierenden Präferenzliste verletzten individuellen Präferenzen entspricht, welche wir minimieren wollen. Beachte, dass das Entfernen der Kanten (A, B) und (A, C) einerseits und das Entfernen der Kanten (B, D) und (C, D) andererseits jeweils zu gleich guten Ergebnissen führt, aber in den beiden Fällen unterschiedliche Kandidaten, nämlich B bzw. D, die resultierenden Präferenzlisten anführen.

Dass die Berechnung des Gewinners mit dem Verfahren von Kemeny-Young NP-schwer ist, kann durch Reduktion des Feedback-Arc-Set-Problems (FAS) gezeigt werden.

Satz 24 ([BTT89])**.** *Die Bestimmung der resultierenden Präferenzordnung sowie des Gewinners beim Kemeny-Young-Verfahren ist NP-schwer.*

Beweisskizze. Reduktion von Feedback-Arc-Set. Sei $\pi(R)$ eine feste Permutation über B und $\pi'(B)$ die umgekehrte Reihenfolge. Gegeben $G = (V, A)$ und $k \in \mathbb{N}$. Für eine Kante $(a, b) \in A$ führen wir Wähler ein, die folgende Präferenzen haben:

1. $a, b, \pi(A \setminus \{a, b\})$
2. $\pi'(A \setminus \{a, b\}), a, b$

Der entstandene Dominanzgraph entspricht dem Orginalgraphen G mit uniformen Kantengewicht 2. Damit können wir FAS berechnen. $\square$

6.5 Mechanismen mit Geldeinsatz

Bisher wurden Alternativen mittels Präferenzordnungen bewertet. Nun wollen wir stattdessen Geld zur Bewertung verwenden und führen dazu Funktionen $v_i : A \to \mathbb{R}$ ein, so dass $v_i(a)$ die Bewertung von Alternative a durch Agent i ist. Zusätzlich kann den Agenten Geld bezahlt (oder von ihnen verlangt) werden, wobei $m_i \in \mathbb{R}$ der Betrag ist, den Agent i erhält. Sein Nutzen ist dann $u_i(a) = v_i(a) + m_i$.

6.5.1 Vickrey-Auktion (Zweitpreisauktion)

Gegeben sind n Mitspieler, die ein zu versteigerndes Objekt jeweils *privat* mit Wert w_i belegen. Gewünscht ist, dass der Mitspieler mit der höchsten Bewertung w_i das Objekt bekommen soll. Die Spieler sollen ihre Bewertungen offenbaren, so dass das Objekt dem Spieler zugewiesen werden kann, dem es am meisten wert ist. Der Spieler i, der den Zuschlag erhält, muss einen Preis p^* bezahlen, hat also Nutzen $w_i - p^*$. Spieler, die den Zuschlag nicht erhalten, haben davon Nutzen 0.

Formal ist also $A = N$, wobei ein Ausgang $a \in A$ bedeutet, dass Spieler a den Zuschlag erhält. Würde man festlegen, dass der Gewinner nichts bezahlen muss, wäre also $p^* = 0$, dann würden die Mitspieler das System manipulieren und öffentlich Werte $w_i' \gg w_i$ deklarieren. Würde man andererseits festlegen, dass der Gewinner i als Preis $p^* = w_i$ zahlt, also soviel, wie ihm das Objekt tatsächlich wert ist, dann würden die Spieler von w_i zu $w_i' = w_i - \varepsilon$ abweichen und damit wieder nicht ihre wahren Bewertungen offenbaren.

Die Lösung, die von Vickrey vorgeschlagen wird, besteht darin, dass der Spieler i, der den Zuschlag erhält, den Preis $p^* = \max_{i \neq j} w_j$ zahlen muss.

Definition 88 (Vickrey-Auktion)**.** Der Gewinner der **Vickrey-Auktion** ist der Spieler i mit dem höchsten deklarierten Wert w_i. Er muss den Preis des zweithöchsten Gebots zahlen, also $p^* = \max_{i \neq j} w_j$.

Wie bereits in Beispiel 23 in Abschnitt 2.2 gezeigt, hat bei einer Vickrey-Auktion keiner der Agenten einen Anreiz, einen anderen Wert für das Objekt anzugeben als seine wahre Bewertung.

Proposition 25 (Vickrey)**.** *Ist i einer der Mitspieler und w_i seine Bewertung des Objekts, u_i sein Nutzen, wenn er wahrheitsgemäß w_i als seine Bewertung des Objekts deklariert, und u_i' sein Nutzen, wenn er fälschlich w_i' als seine Bewertung deklariert, dann ist $u_i \geq u_i'$.* $\square$

6.5.2 Anreizkompatible Mechanismen

Im Weiteren werden Präferenzen als Funktionen $v_i : A \to \mathbb{R}$ modelliert. Der Raum aller Funktionen für Spieler i sei V_i. Anders als bei sozialen Entscheidungsfunktionen reicht es jetzt nicht mehr aus, Entscheidungen über die Alternativen zu treffen, sondern es muss auch über Zahlungen entschieden werden.

Definition 89 (Mechanismus)**.** Ein **Mechanismus** besteht aus einer sozialen Entscheidungsfunktion $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$ und einem Vektor von Bezahlungsfunktionen $p_1, \ldots, p_n$, wobei $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$ der Betrag ist, den Spieler i bezahlen muss.

Der Begriff der Anreizkompatibilität lässt sich zwanglos von sozialen Entscheidungsfunktionen auf Mechanismen übertragen.

Definition 90 (Anreizkompatibilität)**.** Ein Mechanismus $(f, p_1, \ldots, p_n)$ heißt **anreizkompatibel**, falls für jeden Spieler $i = 1, \ldots, n$, für alle Präferenzen $v_1 \in V_1, \ldots, v_n \in V_n$ und jede Präferenz $v_i' \in V_i$ gilt, dass $v_i(f(v_i, v_{-i})) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(f(v_i', v_{-i})) - p_i(v_i', v_{-i})$.

Ist $(f, p_1, \ldots, p_n)$ anreizkompatibel, so zahlt es sich nicht aus, über seine Präferenzen statt der Wahrheit v_i eine Lüge v_i' anzugeben. Mit dem Vickrey-Clarke-Groves-Mechanismus existiert ein anreizkompatibler Mechanismus, der die „soziale Wohlfahrt“, also die Summe aller Einzelnutzen $\sum_{i=1}^{n} v_i(a)$, maximiert. Die Grundidee besteht darin, die Bezahlfunktionen der Spieler so zu wählen, dass der Nutzen der jeweils anderen Spieler in den Bezahlfunktionen wiedergespiegelt wird und jeder Spieler dadurch mit seinem eigenen Nutzen zugleich den gesellschaftlichen Nutzen maximiert.

Definition 91 (Vickrey-Clarke-Groves-Mechanismus)**.** Ein Mechanismus $(f, p_1, \dots, p_n)$ heißt **Vickrey-Clarke-Groves-Mechanismus (VCG-Mechanismus)**, falls

1. $f(v_1, \dots, v_n) \in \operatorname{argmax}_{a \in A} \sum_{i=1}^n v_i(a)$ für alle $v_1, \dots, v_n$ und
2. es Funktionen $h_1, \dots, h_n$ mit $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $p_i(v_1, \dots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \dots, v_n))$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $v_1, \dots, v_n$.

Da $h_i(v_{-i})$ von der deklarierten Präferenz von Spieler i unabhängig ist, kann Spieler i diesen Wert als Konstante c betrachten. Also erhält Spieler i den Nutzen $v_i(f(v_1, \dots, v_n)) + \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \dots, v_n)) - c = \sum_{j=1}^n v_j(f(v_1, \dots, v_n)) - c$.

Satz 26 (Vickrey-Clarke-Groves)**.** *Jeder VCG-Mechanismus ist anreizkompatibel.*

Beweis. Seien i, v_{-i}, v_i und v_i' gegeben. Zu zeigen ist, dass der Nutzen bei Deklaration der wahren Präferenz v_i mindestens so hoch ist wie bei der Deklaration der falschen Präferenz v_i'. Sei dazu $a = f(v_i, v_{-i})$ und $a' = f(v_i', v_{-i})$. Der Nutzen von Spieler i ist $v_i(a') + \sum_{j \neq i} v_j(a') - h_i(v_{-i})$ bei Deklaration von v_i' und $v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - h_i(v_{-i})$ bei Deklaration von v_i. Da $a = f(v_i, v_{-i})$ die soziale Wohlfahrt über alle Alternativen maximiert, gilt $v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) \geq v_i(a') + \sum_{j \neq i} v_j(a')$. Die Ungleichung gilt natürlich auch, wenn man auf beiden Seiten $h_i(v_{-i})$ subtrahiert, und damit ist $v_i(f(v_i, v_{-i})) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(f(v_i', v_{-i})) - p_i(v_i', v_{-i})$. $\square$

6.5.3 Die Clarke-Pivot-Regel

Wir haben bislang noch offengelassen, wie man die Bezahlfunktionen bzw. die Funktionen h_i sinnvoll wählen kann. Alle h_i durch $h_i(v_{-i}) = 0$ zu definieren, wäre zwar zulässig, hätte aber den Nachteil, dass der Mechanismus dadurch im Allgemeinen viel mehr Geld an die Spieler verteilen würde als nötig. Außerdem sollten die Spieler bei nicht-negativen Bewertungen v_i nie mehr bezahlen müssen, als ihnen der Ausgang wert ist, und nie Geld erhalten, sondern nur selbst zahlen.

Definition 92 (Individuelle Rationalität)**.** Ein Mechanismus wird als **individuell rational** bezeichnet, falls die Spieler immer einen nicht-negativen Nutzen haben, d. h. falls für alle $i = 1, \dots, n$ und alle $v_1, \dots, v_n$ gilt, dass $v_i(f(v_1, \dots, v_n)) - p_i(v_1, \dots, v_n) \geq 0$.

Definition 93 (Positiver Transfer)**.** Ein Mechanismus hat keinen **positiven Transfer**, falls keinem Spieler Geld gegeben wird, d. h. für alle Präferenzen $v_1, \dots, v_n$ gilt $p_i(v_1, \dots, v_n) \geq 0$.

Die folgende Wahl der Funktionen h_i führt dazu, dass der Mechanismus individuell rational ist und keinen positiven Transfer hat.

Definition 94 (Clarke-Pivot-Funktion)**.** Die Funktion $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ heißt **Clarke-Pivot-Funktion**.

Diese Wahl der h_i führt zu Bezahlfunktionen $p_i(v_1, \dots, v_n) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$, wenn $a = f(v_1, \dots, v_n)$. Damit bezahlt Spieler i genau die Differenz zwischen dem, was die anderen Spieler zusammen ohne ihn erreichen könnten, und dem, was sie mit ihm erreichen.

Beispiel 95. Angenommen, wir haben zwei Spieler 1 und 2 sowie zwei Alternativen a und b mit $v_1(a) = 10$, $v_1(b) = 2$, $v_2(a) = 9$ und $v_2(b) = 15$. Ohne Spieler 1 maximiert Alternative b wegen $v_2(b) = 15 > 9 = v_2(a)$ die Summe über die Bewertungen der restlichen Spieler. Ist aber auch Spieler 1 beteiligt, maximiert Alternative a wegen $v_1(a)+v_2(a) = 10+9 = 19 > 17 = 2+15 = v_1(b)+v_2(b)$ die Summe über die Bewertungen. Dadurch verschlechtern sich die restlichen Spieler (also Spieler 2) um 6 Einheiten von 15 auf 9. Entsprechend müsste eine Clarke-Pivot-Funktion $h_1(v_2) = 15$ bzw. die Bezahlfunktion $p_1(v_1, \ldots, v_n) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq 1} v_j(b) - \sum_{j \neq 1} v_j(a) = 15 - 9 = 6$ gewählt werden.

Das folgende Lemma bestätigt, dass Clarke-Pivot-Funktionen einen VCG-Mechanismus individuell rational und frei von positiven Transfers macht.

Lemma 27 (Clarke-Pivot-Regel)**.** *Ein VCG-Mechanismus mit Clarke-Pivot-Funktionen hat keine positiven Transfers. Falls $v_i(a) \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, $v_i \in V_i$ und $a \in A$, dann ist der Mechanismus auch individuell rational.*

Beweis. Sei $a = f(v_1, \ldots, v_n)$ die Alternative, die $\sum_{j=1}^n v_j(a)$ maximiert, und b die Alternative, die $\sum_{j \neq i} v_j(b)$ maximiert. Der Nutzen von Spieler i beträgt dann $u_i = v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - \sum_{j \neq i} v_j(b)$. Die Bezahlfunktion für i ist $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$. Es gilt also $p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$, da b gerade so gewählt wurde, dass $\sum_{j \neq i} v_j(b)$ maximiert wird. Also gibt es keine positiven Transfers. Da $v_i(b) \geq 0$ sein soll, gilt $u_i = v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - \sum_{j \neq i} v_j(b) \geq \sum_{j=1}^n v_j(a) - \sum_{j=1}^n v_j(b)$. Da a gewählt wurde, um $\sum_{j=1}^n v_j(a)$ zu maximieren, gilt $\sum_{j=1}^n v_j(a) \geq \sum_{j=1}^n v_j(b)$, also $u_i \geq 0$, und damit ist der Mechanismus auch individuell rational. □

Es folgen einige Beispiele für VCG-Mechanismen mit Clarke-Pivot-Regel.

Beispiel 96 (Vickrey-Auktion)**.** Bei Vickrey-Auktionen ist die Menge der Alternativen A gleich der Menge der Spieler N, und der Nutzen eines Spielers ist $v_i(j) = w_i$, falls $j = i$, und $v_i(j) = 0$, falls $j \neq i$, wenn $w_i > 0$ der Wert ist, den das Objekt für Spieler i hat. Die soziale Wohlfahrt wird maximiert, wenn Alternative j den Wert $\sum_{i=1}^n v_i(j)$ maximiert. Weil für jede Alternative j alle Summanden bis auf einen gleich Null sind und der verbleibende Summand den Wert w_j hat, geschieht dies genau dann, wenn w_j maximiert wird, wenn also der Bieter mit der höchsten Bewertung den Zuschlag erhält. Sei $a = f(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{argmax}_{j \in A} w_j$ dieser Bieter. Damit es sich um einen VCG-Mechanismus mit Clarke-Pivot-Regel handelt, müssen die Bezahlfunktionen die Form $p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$ mit $h_i(v_{-i}) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b)$ haben. Es gilt aber $\max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b) = \max_{b \in A \setminus \{i\}} w_b$. Für $i = a$ ist damit $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a) = \max_{b \in A \setminus \{a\}} w_b - 0 = \max_{b \in A \setminus \{a\}} w_b$, also gerade der Wert des zweithöchsten Gebots. Falls $i \neq a$, so ist $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max_{b \in A} \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a) = \max_{b \in A \setminus \{i\}} w_b - w_a = w_a - w_a = 0$, ein Bieter, der den Zuschlag nicht bekommen hat, zahlt also nichts.

Beispiel 97 (Bilateraler Handel)**.** Ein Verkäufer s bietet ein Objekt an, das er mit $0 \leq w_s \leq 1$ bewertet. Ein potentieller Käufer b bewertet das Objekt mit $0 \leq w_b \leq 1$. Die Alternativen sind $A = \{\textit{trade}, \textit{no-trade}\}$, die Nutzenwerte $v_s(\textit{no-trade}) = 0$, $v_s(\textit{trade}) = -w_s$, $v_b(\textit{no-trade}) = 0$ und $v_b(\textit{trade}) = w_b$. Ein VCG-Mechanismus maximiert $v_s(a) + v_b(a)$. Es ist $v_s(\textit{trade}) + v_b(\textit{trade}) = w_b - w_s$ und $v_s(\textit{no-trade}) + v_b(\textit{no-trade}) = 0$, die Alternative *trade* maximiert die soziale Wohlfahrt also genau dann, wenn $w_b \geq w_s$ gilt, und *no-trade*, sonst. Wir wollen den Mechanismus so gestalten, dass bei Wahl der Alternative *no-trade* beide Spieler nichts zahlen müssen und nichts erhalten, dass also $p_s(v_s, v_b) = p_b(v_s, v_b) = 0$ gilt. Dazu können wir für den Käufer die Clarke-Pivot-Funktion $h_b(v_s) = \max_{a \in A} v_s(a)$ wählen. Für den Verkäufer müssen wir um eine additive Konstante von der Clarke-Pivot-Funktion abweichen und $h_s(v_b) = \max_{a\in A} v_b(a) - w_b$ setzen. Dann haben wir für die Alternative *no-trade*

$$p_s(v_s, v_b) = \max_{a\in A} v_b(a) - w_b - v_b(\textit{no-trade}) = w_b - w_b - 0 = 0 \quad \text{und}$$
$$p_b(v_s, v_b) = \max_{a\in A} v_s(a) - v_s(\textit{no-trade}) = 0 - 0 = 0.$$

Für die Alternative *trade* erhalten wir

$$p_s(v_s, v_b) = \max_{a\in A} v_b(a) - w_b - v_b(\textit{trade}) = w_b - w_b - w_b = -w_b \quad \text{und}$$
$$p_b(v_s, v_b) = \max_{a\in A} v_s(a) - v_s(\textit{trade}) = 0 + w_s = w_s.$$

Wegen $w_b \geq w_s$ erhält also der Verkäufer mindestens so viel wie der Käufer zahlt, d. h. der Handel wird subventioniert. Ohne diese Subventionen wäre ein anreizkompatibler bilateraler Handel nicht möglich. Beachte, dass der Käufer und der Verkäufer das System durch Absprachen ausnutzen können.

Beispiel 98 (Öffentliches Projekt)**.** Ein öffentliches Projekt kostet die Regierung C Kosteneinheiten und wird von jedem Bürger i mit w_i bewertet. Das Projekt sollte durchgeführt werden, wenn $\sum_i w_i \geq C$ ist. Wir nehmen die Regierung als Spieler hinzu, die Kosten C hat, falls das Projekt durchgeführt wird. Die Alternativen sind $A = \{\textit{project}, \textit{no-project}\}$ mit Bewertungen $v_R(\textit{project}) = -C$, $v_R(\textit{no-project}) = 0$, $v_i(\textit{project}) = w_i$ und $v_i(\textit{no-project}) = 0$. Ein VCG-Mechanismus mit Clarke-Pivot-Regel hat die Eigenschaft, dass für jeden Bürger i gilt

$$h_i(v_{-i}) = \max_{a\in A}\left(\sum_{j\neq i} v_j(a) + v_R(a)\right) = \begin{cases} \sum_{j\neq i} w_j - C, & \text{falls } \sum_{j\neq i} w_j > C \\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Die Bezahlfunktion für Bürger i ist $p_i(v_1, \ldots, v_n, v_R) = h_i(v_{-i}) - \big(\sum_{j\neq i} v_j(f(v_1, \ldots, v_n, v_R)) + v_R(f(v_1, \ldots, v_n, v_R))\big)$, also $(\sum_{j\neq i} w_j - C) - (\sum_{j\neq i} w_j - C) = 0$, falls das Projekt bereits stattfindet, ohne dass der Nutzen von Bürger i den Ausschlag zugunsten des Projekts gegeben hätte, $0 - (\sum_{j\neq i} w_j - C) = C - \sum_{j\neq i} w_j$, falls das Projekt nur mit Bürger i stattfindet, falls also $\sum_j w_j \geq C$, aber $\sum_{j\neq i} w_j < C$, und 0, sonst.

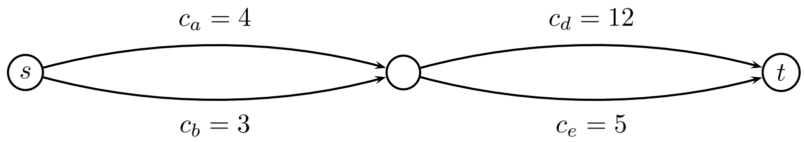
Bürger i bezahlt also $C - \sum_{j\neq i} w_j$ genau dann, wenn er dafür verantwortlich ist, dass das Projekt durchgeführt wird. Er bezahlt nur die Differenz zwischen dem, was das Projekt seinen Mitbürgern wert ist und den Kosten C der Regierung, im Allgemeinen also weniger als w_i. Es gilt immer $\sum_i p_i(\textit{project}) \leq C$, d. h. es muss wieder Geld zugeschossen werden.

Beispiel 99 (Pfad in Netzwerken)**.** Betrachte ein Kommunikationsnetzwerk, gegeben durch einen Graphen $G = (V, E)$. Jede Kante $e \in E$ gehört einem anderen Spieler (mit dem wir sie identifizieren) und erzeugt bei Benutzung Kosten c_e. Wir wollen einen Pfad zwischen zwei Knoten s und t mieten. Die Menge der Alternativen ist die Menge der Pfade zwischen s und t. Spieler e hat Kosten c_e, falls e auf dem ausgewählten Pfad liegt, sonst Kosten 0. Maximierung der sozialen Wohlfahrt bedeutet hier, $\sum_{e\in p} c_e$ über alle alternativen Pfade p von s nach t zu minimieren. Es ist also $A = \{p \mid p \text{ Pfad von } s \text{ nach } t\}$ und $v_e(p) = -c_e$, falls $e \in p$, und $v_e(p) = 0$, sonst.

Für $G = (V, E)$ und $e \in E$ sei $G \setminus e = (V, E \setminus \{e\})$ der Graph G ohne die Kante e. In einem VGC-Mechanismus mit Clarke-Pivot-Regel ist dann $h_e(v_{-e}) = \max_{p'\in G\setminus e} \sum_{e'\in p'} -c_{e'}$, also die Kosten des günstigsten Pfades von s nach t in $G \setminus e$. Dabei nehmen wir an, dass G zweifach zusammenhängend ist, denn sonst könnte das Entfernen der Kante e den Graphen zerfallen lassen und es könnte keinen alternativen Pfad p' von s nach t geben.

Die Bezahlfunktionen sind $p_e(v_1, \ldots, v_n) = h_e(v_{-e}) - \sum_{e \neq e' \in p} -c_{e'}$, wobei $p = f(v_1, \ldots, v_n)$ der vom Mechanismus gewählte Pfad in G ist. Falls $e \notin p$, so hat diese Funktion den Wert 0, und sonst hat sie den Wert $\max_{p' \in G \setminus e} \sum_{e' \in p'} -c_{e'} - \sum_{e \neq e' \in p} -c_{e'}$.

Sei das Kommunikationsnetz etwa durch den folgenden Graphen gegeben.



Die Gesamtkosten entlang den Kanten b und e betragen dann 8, die Kosten ohne die Kante e betragen 3 und die Kosten des günstigsten Pfades, der e nicht enthält, betragen 15 (nämlich entlang b und d). Damit erhalten wir als Differenz den Wert der Bezahlfunktion $-15-(-3) = -12$, der Besitzer der Kante e erhält also eine Bezahlung von 12 für die Benutzung seiner Kante.

Beachte, dass sich nach Wegfall einer Kante e ein alternativer Pfad von s nach t nicht notwendigerweise nur in einer Kante vom ursprünglichen Pfad unterscheiden muss, d. h. dass es im Allgemeinen nicht ausreicht, die weggefallene Kante e einfach durch eine andere Kante zwischen denselben Knoten zu ersetzen, sondern dass ein alternativer Pfad einen völlig anderen Weg von s nach t wählen kann.

6.6 Kombinatorische Auktionen

Im Unterschied zu den Auktionen, die wir bislang betrachtet haben, werden bei kombinatorischen Auktionen mehrere Objekte versteigert, und die Bieter können Präferenzen über Kombinationen (Bündeln) von Objekten haben. Dabei können sich aus Sicht eines Bieters Güter ergänzen oder ersetzen. Beispielsweise könnte einem Bieter ein Bündel bestehend aus einem linken und einem rechten Schuh mehr wert sein als die Summe seiner Bewertungen eines linken Schuhs allein und eines rechten Schuhs allein. Ziel der Auktion ist es, die Güter den Bietern so zuzuweisen, dass kein Objekt doppelt vergeben und die soziale Wohlfahrt maximiert wird.

6.6.1 Definitionen

Im folgenden sei immer $G = \{1, \ldots, m\}$ die Menge der zu versteigernden Güter und $N = \{1, \ldots, n\}$ die Menge der Bieter.

Definition 100 (Bewertung)**.** Eine **Bewertung** ist eine Funktion $v : 2^G \to \mathbb{R}^+$ mit $v(\varnothing) = 0$ und $v(S) \leq v(T)$ für $S \subseteq T \subseteq G$. Sind $S, T \subseteq G$ disjunkt, so ergänzen sich S und T, falls $v(S \cup T) > v(S) + v(T)$, und S und T ersetzen sich, falls $v(S \cup T) < v(S) + v(T)$.

Die Forderung, dass $v(\varnothing) = 0$, entspricht einer Normalisierung der Bewertungen, und die Eigenschaft, dass $v(S) \leq v(T)$ für $S \subseteq T \subseteq G$, wird auch als Monotonie oder free disposal (also kostenloses Entsorgen von überschüssigen Gütern) bezeichnet.

Definition 101 (Allokation)**.** Eine **Allokation** der Güter auf die Bieter ist $(S_1, \dots, S_n)$ mit $S_i \subseteq G$ für $i = 1, \dots, n$ und $S_i \cap S_j = \varnothing$ für $i \neq j$. Die **soziale Wohlfahrt** einer solchen Allokation ist $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$, wenn $v_1, \dots, v_n$ die Bewertungen der Bieter sind. Eine Allokation heißt **sozial effizient**, falls sie unter allen Allokationen die soziale Wohlfahrt maximiert. Die Menge aller Allokationen sei A.

Definition 102 (Gewinnerbestimmungsproblem)**.** Seien $v_i : 2^G \to \mathbb{R}^+$, $i = 1, \dots, n$, die deklarierten Bewertungen der Bieter. Das **Gewinnerbestimmungsproblem** (Winner determination problem, WDP) ist das Problem, für diese Bewertungen eine sozial effiziente Allokation $a \in A$ zu bestimmen.

Wollen wir einen Mechanismus für das Gewinnerbestimmungsproblem entwickeln, so müssen wir uns nicht nur über dessen Anreizkompatibilität Gedanken machen, sondern wegen der exponentiell vielen Teilmengen, für die die Bieter Präferenzen haben können, auch über die Komplexität der Repräsentation und Kommunikation der Präferenzen und die Berechnungskomplexität des Gewinnerbestimmungsproblems.

Hinsichtlich der Komplexität der Repräsentation der Präferenzen wollen wir uns auf einen Spezialfall, sogenannte single-minded bidders, beschränken, bei dem die Präferenzen eines Bieters in polynomiellem Platz repräsentiert werden können. Selbst in diesem Spezialfall ist aber das Gewinnerbestimmungsproblem immer noch NP-schwer, weswegen wir in den folgenden Abschnitten einen Approximationsalgorithmus sowie eine Kodierung als ganzzahliges lineares Programm und dessen LP-Relaxierung betrachten wollen. Die Anreizkompatibilität werden wir jeweils im Kontext der konstruierten Mechanismen diskutieren.

6.6.2 Single-Minded Bidders

In diesem Abschnitt betrachten wir nur sogenannte single-minded bidders, also Bieter, die ein bestimmtes Bündel ersteigern wollen, für dieses Bündel (und alle Obermengen) eine feste Bewertung v^* haben, und alle anderen Bündel mit 0 bewerten.

Definition 103 (Single-minded bidder)**.** Eine Bewertung v heißt **single-minded**, falls es ein Bündel $S^* \subseteq G$ und einen Wert $v^* \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass

$$v(S) = \begin{cases} v^* & \text{falls } S^* \subseteq S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ein **single-minded bid** ist ein Paar (S^*, v^*).

Komplexität

Das Problem der Repräsentationkomplexität haben wir damit gelöst. Dass wir damit die Berechnungskomplexität aber noch nicht in den Griff bekommen haben, zeigt der folgende Satz.

Definition 104 (Allokationsproblem für single-minded bidders)**.** Das **Allokationsproblem für single-minded bidders** (APSMB) ist definiert durch folgende Ein- und Ausgaben.

Eingabe: Gebote (S_i^*, v_i^*) für $i = 1, \dots, n$
Ausgabe: $W \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $S_i^* \cap S_j^* = \varnothing$ für $i, j \in W$, $i \neq j$, so dass $\sum_{i \in W} v_i^*$ maximal.

Wir wollen zeigen, dass APSMB NP-vollständig ist. Da das APSMB ein Optimierungsproblem ist, müssen wir für den Beweis das entsprechende Entscheidungsproblem betrachten.

Definition 105 (Allokationsproblem für single-minded bidders (Entscheidungsproblem))**.** Die **Entscheidungsproblemvariante von APSMB** (APSMB-D) ist definiert durch folgende Ein- und Ausgaben.

Eingabe: Gebote (S_i^*, v_i^*) für $i = 1, \dots, n$ und $k \in \mathbb{N}$
Ausgabe: Existiert ein $W \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $S_i^* \cap S_j^* = \varnothing$ für $i, j \in W$, $i \neq j$, so dass $\sum_{i \in W} v_i^* \geq k$?

Satz 28. *APSMB-D ist NP-vollständig.*

Beweis. Reduktion von Independent-Set. Als Independent-Set-Instanz sei ein ungerichteter Graph (V, E) und ein $k_{IS} \in \mathbb{N}$ gegeben. Gefragt ist also, ob (V, E) eine unabhängige Menge der Größe k_{IS} enthält. In der entsprechenden APSMB-D-Instanz ist dann $k = k_{IS}$, die Menge der Güter $G = E$, die Menge der Bieter $N = V$, und für jeden Bieter $i \in V$ haben wir das Gebot (S_i^*, v_i^*) mit $S_i^* = \{e \in E \mid i \in e\}$ und $v_i^* = 1$. Die Knoten bieten also um ihre inzidenten Kanten. Wegen $S_i^* \cap S_j^* = \varnothing$ für $i, j \in W$, $i \neq j$, repräsentiert die Menge der Gewinner W eine unabhängige Menge der Mächtigkeit $|W| = \sum_{i \in W} v_i^*$. Also existiert eine unabhängige Menge der Kardinalität mindestens k_{IS} genau dann, wenn es eine Menge W von Gewinnern mit $\sum_{i \in W} v_i^* \geq k$ gibt. Damit ist die NP-Schwere gezeigt. Dass APSMB-D $\in$ NP, ist klar (Gewinner raten und verifizieren). □

Wir sind also zur Lösung des Allokationsproblems auf Approximationsalgorithmen oder heuristische Ansätze angewiesen. Im folgenden Teilabschnitt wollen wir uns mit einem Approximationsalgorithmus für das Allokationsproblem beschäftigen.

Approximationsalgorithmen

Zunächst wollen wir die Güte einer Approximation definieren.

Definition 106 (Approximationsgüte)**.** Sei $c \geq 1$. Eine Allokation $(S_1, \dots, S_n)$ ist eine **c-Approximation** der optimalen Allokation, falls für eine optimale Allokation $(T_1, \dots, T_n)$ gilt, dass $\sum_{i=1}^n v_i(T_i) \leq c \cdot \sum_{i=1}^n v_i(S_i)$.

Satz 29. *APSMB innerhalb eines Faktors $c \leq m^{1/2 - \varepsilon}$ zu approximieren ist NP-schwer.* □

Das Beste, worauf wir im Spezialfall von single-minded bidders noch hoffen können, ist also ein anreizkompatibler $m^{1/2}$-Approximationsalgorithmus mit polynomieller Laufzeit. Einen solchen wollen wir im folgenden vorstellen.

Definition 107 (Mechanismus für single-minded bidders)**.** Sei V_{sm} die Menge aller single-minded bids und A die Menge aller Allokationen. Ein **Mechanismus für single-minded bidders** ist ein Tupel $(f, p_1, \dots, p_n)$, bestehend aus einer sozialen Entscheidungsfunktion $f : V_{sm}^n \to A$ und Bezahlfunktionen $p_i : V_{sm}^n \to \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Der Mechanismus ist **berechnungseffizient**, falls f und alle p_i in polynomieller Zeit berechnet werden können. Er ist **anreizkompatibel**, falls für alle $i = 1, \dots, n$ und alle $v_1, \dots, v_n, v_i' \in V_{SM}$ gilt, dass $v_i(f(v_i, v_{-i})) - p_i(v_i, v_{-i}) \geq v_i(f(v_i', v_{-i})) - p_i(v_i', v_{-i})$, wobei $v_i(a) = v_i^*$, falls i in a gewinnt (einen Zuschlag erhält), und $v_i(a) = 0$, sonst.

Im Prinzip könnten wir nun einen VCG-Mechanismus verwenden. Ein solcher wäre zwar anreizkompatibel, aber nicht berechnungseffizient, weil sowohl für f als auch für die p_i immer optimale soziale Wohlfahrtswerte berechnet werden müssen. Dass dies NP-schwer ist, haben wir in Satz 28 gesehen. Ein VCG-artiger Mechanismus, der wie ein VCG-Mechanismus definiert ist, aber soziale Wohlfahrten approximiert (bestenfalls innerhalb eines Faktors $\sqrt{m}$), wäre umgekehrt zwar berechnungseffizient, aber nicht mehr anreizkompatibel. Die Lösung ist, den VCG-Ansatz hier zu verwerfen und einen spezialisierten Mechanismus zu verwenden.

Definition 108 (Greedy-Mechanismus für single-minded bidders)**.** Der **Greedy-Mechanismus für single-minded bidders** ist wie folgt definiert. Seien die Bieter $1, \dots, n$ so angeordnet, dass

$$\frac{v_1^*}{\sqrt{|S_1^*|}} \geq \frac{v_2^*}{\sqrt{|S_2^*|}} \geq \cdots \geq \frac{v_n^*}{\sqrt{|S_n^*|}}.$$

Sei ferner die Menge $W \subseteq \{1, \dots, n\}$ prozedural definiert durch den folgenden Pseudocode:

$W \leftarrow \varnothing$
for $i = 1, \dots, n$ **do**
  if $S_i^* \cap \left(\bigcup_{j \in W} S_j^* \right) = \varnothing$ **then**
    $W \leftarrow W \cup \{i\}$
  end if
end for

Der Mechanismus liefert dann als Ergebnis die Allokation a, in der genau die Bieter aus W einen Zuschlag bekommen. Für die Bezahlungen gilt: Falls $i \in W$ und es einen kleinsten Index j gibt, so dass $S_i^* \cap S_j^* \neq \varnothing$ und für alle $k < j$, $k \neq i$, $S_k^* \cap S_j^* = \varnothing$, so ist

$$p_i(v_1, \dots, v_n) = \frac{v_j^*}{\sqrt{|S_j^*|/|S_i^*|}},$$

und sonst ist $p_i(v_1, \dots, v_n) = 0$.

Dass der Greedy-Mechanismus für single-minded bidders effizient berechenbar ist, ist offensichtlich. Wir wollen nun noch zeigen, dass er anreizkompatibel ist und immer eine Allokation erzeugt, deren soziale Wohlfahrt um höchstens den Faktor $\sqrt{m}$ schlechter ist als die optimale soziale Wohlfahrt. Um die Anreizkompatibilität zu zeigen, zeigen wir, dass jeder Mechanismus für single-minded bidders, bei dem Verlierer nichts zahlen, der monoton ist, und der kritische Bezahlungen verwendet, anreizkompatibel ist, und dass der Greedy-Mechanismus für single-minded bidders diese Anforderungen erfüllt.

Definition 109 (Monotonie)**.** Ein Mechanismus für single-minded bidders ist **monoton**, wenn ein Bieter, der mit Gebot (S^*, v^*) gewinnt, auch mit jedem Gebot (S', v') gewinnt, bei dem $S' \subseteq S^*$ und $v' \geq v^*$ (für feste Gebote der anderen Bieter).

Definition 110 (Kritische Bezahlungen)**.** Ein Mechanismus für single-minded bidders benutzt **kritische Bezahlungen**, wenn ein Bieter, der gewinnt, den minimalen Wert zahlt, der zum Gewinnen nötig ist, also das Infimum aller v', so dass (S^*, v') gewinnt.

Lemma 30. *Der Greedy-Mechanismus für single-minded bidders ist monoton, benutzt kritische Bezahlungen, und Verlierer zahlen nichts.*

Beweis. Wir zeigen die einzelnen Behauptungen getrennt.

Monotonie: Erhöhen von v_i^* oder Verkleinern von S_i^* schiebt Bieter i in der Greedy-Ordnung höchstens weiter nach vorne, wodurch es für ihn nur leichter wird zu gewinnen.

Kritische Bezahlungen: Bieter i gewinnt, solange er in der Greedy-Ordnung vor Bieter j steht (falls ein solches j überhaupt existiert). Dies gilt genau dann, wenn

$$\frac{v_i^*}{\sqrt{|S_i^*|}} \geq \frac{v_j^*}{\sqrt{|S_j^*|}},$$

also genau dann, wenn

$$v_i^* \geq \frac{v_j^* \sqrt{|S_i^*|}}{\sqrt{|S_j^*|}} = \frac{v_j^*}{\sqrt{|S_j^*|/|S_i^*|}} = p_i.$$

Verlierer zahlen nichts: Offensichtlich. □

Lemma 31. *Ein Mechanismus für single-minded bidders, bei dem Verlierer nichts zahlen, der monoton ist, und der kritische Bezahlungen verwendet, ist anreizkompatibel.*

Beweis. Zunächst wollen wir zeigen, dass die Angabe der wahren Gebote nie zu negativem Nutzen führt. Verliert das angegebene Gebot, so hat der Bieter Nutzen 0. Gewinnt es, hat er Nutzen $v^* - p^* \geq 0$, da $v^* \geq p^*$, denn p^* ist gerade die kritische Bezahlung, und wenn das Gebot gewinnt, muss der Bieter (wahrheitsgemäß) einen Betrag v^* von mindestens p^* geboten haben.

Nun wollen wir zeigen, dass die Angabe eines vom wahren Gebot (S^*, v^*) abweichenden Gebots (S', v') keinen höheren Nutzen als (S^*, v^*) bringt. Falls (S', v') verlierend ist oder $S^* \nsubseteq S'$, der Bieter also nicht das erhält, was er wünscht, erhält er Nutzen 0 in (S', v'), also keine Verbesserung gegenüber seinem Nutzen bei Angabe von (S^*, v^*), die nie zu negativem Nutzen führen kann.

Bleibt also noch der Fall, dass (S', v') gewinnend ist und $S^* \subseteq S'$. Um zu zeigen, dass auch dann (S^*, v^*) ein mindestens so gutes Gebot ist wie (S', v'), gehen wir in zwei Schritten vor: Wir zeigen, dass (S^*, v') mindestens so gut ist wie (S', v'), und dann, dass (S^*, v^*) mindestens so gut ist wie (S^*, v').

Um zu zeigen, dass (S^*, v') mindestens so gut ist wie (S', v'), sei p' die Bezahlung bei Gebot (S', v') und p die Bezahlung bei Gebot (S^*, v'). Für alle $x < p$ ist (S^*, x) verlierend, da p gerade der kritische Wert für S^* ist. Wegen der Monotonie ist dann auch (S', x) verlierend für alle $x < p$. Also ist der kritische Wert p' für S' mindestens p. Also ist (S^*, v') immer noch gewinnend, wenn (S', v') es war, und erzeugt die gleiche Bezahlung.

Um zu zeigen, dass (S^*, v^*) mindestens so gut ist wie (S^*, v'), müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Angenommen, (S^*, v^*) ist gewinnend mit Bezahlung p^*. Wenn $v' > p^*$, so ist

(S^*, v') immer noch gewinnend mit der gleichen Bezahlung, es gibt also keinen Anreiz, zu (S^*, v') abzuweichen. Wenn $v' \leq p^*$, so ist (S^*, v') verlierend. Abweichen auf (S^*, v') bringt also keinen höheren Nutzen. Der zweite Fall, den wir noch betrachten müssen, ist der, in dem (S^*, v^*) verlierend ist. Dann ist aber v^* kleiner als der entsprechende kritische Wert, womit die Bezahlung p' für ein gewinnendes Gebot (S^*, v') höher wäre als v^*. Damit wäre eine Abweichung auf (S^*, v') unprofitabel. $\square$

Korollar 32. *Der Greedy-Mechanismus für single-minded bidders ist anreizkompatibel.* $\square$

Nachdem wir nun die Anreizkompatibilität des Greedy-Mechanismus für single-minded bidders gezeigt haben, fehlt noch der Beweis seiner Approximationsgarantie. In diesem Beweis benötigen wir an einer Stelle die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, die wir hier aber nur zitieren, nicht beweisen, wollen.

Satz 33 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)**.** *Seien $x_j, y_j \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\sum_j x_j y_j \leq \sqrt{\sum_j x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_j y_j^2}.$$

Lemma 34. *Der Greedy-Mechanismus für single-minded bidders produziert eine Gewinnermenge, die eine soziale Wohlfahrt induziert, die um höchstens den Faktor $\sqrt{m}$ von der optimalen sozialen Wohlfahrt abweicht.*

Beweis. Sei W^* eine Menge von gewinnenden Bietern, so dass $\sum_{i \in W^*} v_i^*$ maximal wird und $S_i^* \cap S_j^* = \varnothing$ für $i, j \in W^*$, $i \neq j$, und sei W die Ausgabe des Greedy-Mechanismus für single-minded bidders. Zu zeigen ist also, dass $\sum_{i \in W^*} v_i^* \leq \sqrt{m} \sum_{i \in W} v_i^*$.

Für $i \in W$ sei $W_i^* = \{j \in W^* \mid j \geq i \text{ und } S_i^* \cap S_j^* \neq \varnothing\}$ die Menge der im optimalen Fall gewinnenden Bieter, die mit i identisch sind oder wegen Bieter i nicht in der Menge der im approximativen Fall gewinnenden Bieter liegen. Da alle $j \in W_i^*$ in der Greedy-Ordnung nicht vor i liegen, gilt für diese j, dass

$$v_j^* \leq \frac{v_i^* \sqrt{|S_j^*|}}{\sqrt{|S_i^*|}}$$

also durch Summation über alle $j \in W_i^*$ auch

$$\sum_{j \in W_i^*} v_j^* \leq \frac{v_i^*}{\sqrt{|S_i^*|}} \sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j^*|}. \tag{6.1}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung für $x_j = 1$ und $y_j = \sqrt{|S_j^*|}$ erhalten wir außerdem, dass

$$\sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j^*|} \leq \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} 1^2} \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j^*|} = \sqrt{|W_i^*|} \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j^*|}. \tag{6.2}$$

Für alle $j \in W_i^*$ gilt $S_i^* \cap S_j^* \neq \varnothing$, d. h. es gibt ein $g(j) \in S_i^* \cap S_j^*$. Da W^* eine Allokation induziert, also keine zwei Bieter dasselbe Objekt erhalten, gilt $S_{j_1}^* \cap S_{j_2}^* = \varnothing$ für $j_1, j_2 \in W_i^*$,

$j_1 \neq j_2$, also erst recht $(S_i^* \cap S_{j_1}^*) \cap (S_i^* \cap S_{j_2}^*) = \varnothing$, d. h. $g(j_1) \neq g(j_2)$ für $j_1, j_2 \in W_i^*$ mit $j_1 \neq j_2$. Also ist g eine injektive Funktion von W_i^* nach S_i^* und wir erhalten

$$|W_i^*| \leq |S_i^*|. \tag{6.3}$$

Da W^* eine Allokation induziert, gilt auch

$$\sum_{j \in W_i^*} |S_j^*| \leq m. \tag{6.4}$$

Mit Ungleichungen (6.1), (6.2), (6.3) und (6.4) zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{j \in W_i^*} v_j^* &\leq \frac{v_i^*}{\sqrt{|S_i^*|}} \sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j^*|} \leq \frac{v_i^*}{\sqrt{|S_i^*|}} \sqrt{|W_i^*|} \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j^*|} \\ &\leq \frac{v_i^*}{\sqrt{|S_i^*|}} \sqrt{|S_i^*|} \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j^*|} \leq \frac{v_i^*}{\sqrt{|S_i^*|}} \sqrt{|S_i^*|} \sqrt{m} = \sqrt{m} v_i^*. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Ferner gilt nach Definition der W_i^*, dass

$$W^* \subseteq \bigcup_{i \in W} W_i^*. \tag{6.6}$$

Mit (6.6) und (6.5) zusammen erhalten wir schließlich die gewünschte Abschätzung

$$\sum_{i \in W^*} v_i^* \leq \sum_{i \in W} \sum_{j \in W_i^*} v_j^* \leq \sum_{i \in W} \sqrt{m} v_i^* = \sqrt{m} \sum_{i \in W} v_i^*.$$

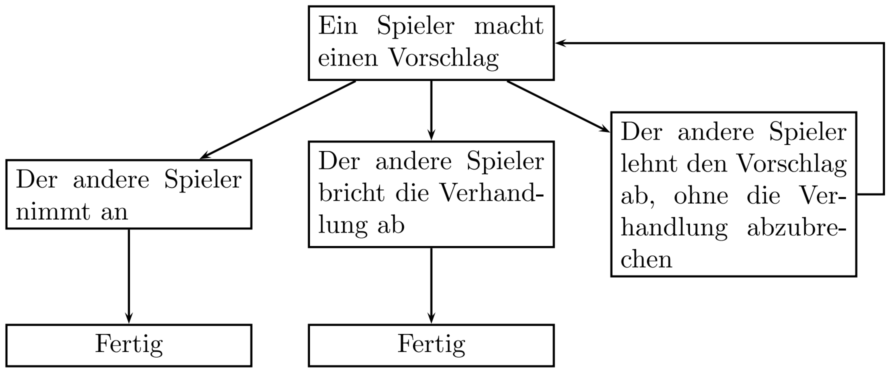
Die soziale Wohlfahrt von W unterscheidet sich also höchstens um einen Faktor $\sqrt{m}$ von der optimalen sozialen Wohlfahrt. $\square$

Der folgende Satz fasst die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen.

Satz 35. *Der Greedy-Mechanismus für single-minded bidders ist effizient berechenbar, anreizkompatibel und erzeugt eine Allokation, deren soziale Wohlfahrt eine $\sqrt{m}$-Approximation der optimalen sozialen Wohlfahrt ist.* $\square$

7 Verhandlungsspiele

Ein Verhandlungsspiel besitzt die allgemeine Struktur, dass ein Spieler einen Vorschlag macht und der andere Spieler den Vorschlag beantwortet, indem er die Verhandlung abbricht, den Vorschlag annimmt oder ihn ablehnt, ohne die Verhandlung abzubrechen, worauf einer der Spieler ein neues Angebot macht.



Häufig spielt die für die Verhandlung aufgewandte Zeit eine Rolle, d.h. später erlangter Nutzen ist weniger wert als früherer. Oft werden die Vorschläge abwechselnd gemacht.

7.1 Verhandlungsspiele mit abwechselnden Vorschlägen

Verhandlungsspiele mit abwechselnden Vorschlägen sind spezielle extensive Zwei-Personen-Spiele mit perfekter Information.

Definition 111 (Verhandlungsspiel mit abwechselnden Vorschlägen)**.** Ein **Verhandlungsspiel mit abwechselnden Vorschlägen** ist ein extensives Spiel mit perfekter Information $\Gamma = \langle N, H, P, (\preceq_i)_{i \in N} \rangle$, wobei $N = \{1, 2\}$ ist und H mit Hilfe einer kompakten und zusammenhängenden Teilmenge X eines euklidischen Raums, der Menge $T = \mathbb{N}$ der Zeitpunkte sowie von zwei Aktionen R (Vorschlag ablehnen) und A (Vorschlag annehmen) wie folgt definiert ist: es gibt vier Typen von Historien, nämlich

Typ I: die leere Historie $\langle\rangle$ und Historien der Form $\langle x^0, R, x^1, \ldots, x^t, R \rangle$ mit $t \in \mathbb{N}$ und $x^0, x^1, \ldots, x^t \in X$,

Typ II: Historien der Form $\langle x^0, R, \ldots, R, x^t \rangle$ mit $t \in \mathbb{N}$ und $x^0, \ldots, x^t \in X$,

Typ III: Historien der Form $\langle x^0, R, \ldots, R, x^t, A \rangle$ mit $t \in \mathbb{N}$ und $x^0, \ldots, x^t \in X$ und

Typ IV: Historien der Form $\langle x^0, R, x_1, R, \ldots \rangle$ mit $x^0, x^1, \ldots \in X$.

Historien von Typ I und Typ II sind nichtterminale Historien, solche von Typ III und Typ IV sind terminale Historien. Es ist $P(h) = 1$, falls h eine Historie von Typ I oder Typ II mit ungeradem t oder die leere Historie ist. $P(h) = 2$, falls h von Typ I oder Typ II und t gerade ist. Statt Auszahlungsfunktionen $(u_i)_{i\in N}$ verwenden wir **Präferenzrelationen**, d.h. reflexive und transitive Relationen, $(\preceq_i)_{i\in N}$. Neben der Reflexivität und Transitivität wollen wir einige weitere Anforderungen an die Relationen $\preceq_i$ stellen. Wir nehmen an, dass der Weg zu einer Vereinbarung für deren Bewertung unerheblich ist, und partitionieren die terminalen Historien entsprechend in Äquivalenzklassen: die Historien von Typ IV bilden die Äquivalenzklasse D, die Konfliktvereinbarung, d.h. das Ergebnis bei einem Scheitern der Verhandlung. Die Historien von Typ III werden in Klassen $(x,t) \in X \times T$ eingeteilt, wobei eine Klasse (x,t) alle Historien der Form $\langle x^0, R, x^1, \ldots, R, x^t, A\rangle$ mit $x = x^t$ umfasst. Die Präferenzrelation $\preceq_i$ von Spieler i ist nun über der Menge $(X \times T) \cup \{D\}$ der Äquivalenzklassen von Historien definiert. Sie muss folgende Bedingungen erfüllen:

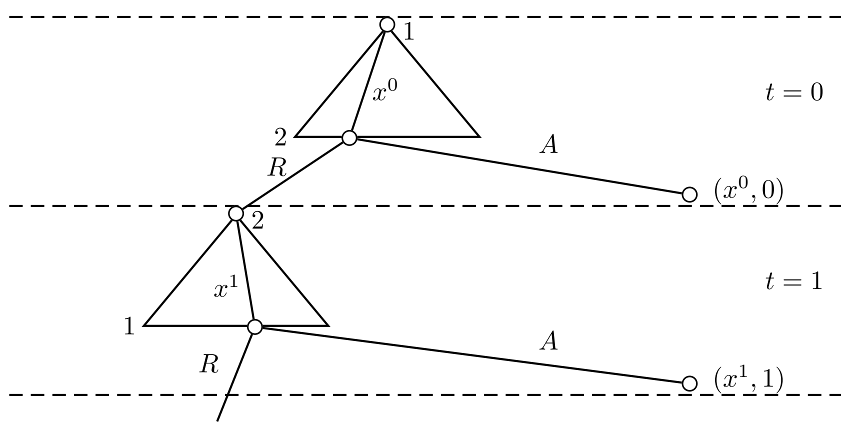
- alles ist mindestens so gut wie das Scheitern der Verhandlung, d.h. $(x,t) \succeq_i D$ für alle $(x,t) \in X \times T$,
- Zeit ist wertvoll, d.h. $(x,t) \succeq_i (x,t+1)$ für alle $(x,t) \in X \times T$ mit der strikten Präferenz $(x,0) \succ_i D$ für alle $x \in X$,
- Präferenz ist stationär, d.h. $(x,t) \succeq_i (y,t+1)$ gdw. $(x,0) \succeq_i (y,1)$ und $(x,t) \succeq_i (y,t)$ gdw. $(x,0) \succeq_i (y,0)$ für alle $x,y \in X$ und $t \in T$, und
- Präferenz ist stetig, d.h. falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in X$ sind und für zwei Zeitpunkte $s,t \in T$ gilt, dass $(x_n,t) \succeq_i (y_n,s)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $(x,t) \succeq_i (y,s)$.

Lemma 36. *Ist $\preceq_i$ eine Präferenzrelation, die die Eigenschaften aus Definition 111 besitzt, so kann $\preceq_i$ durch eine Auszahlungsfunktion u_i repräsentiert werden, genauer: für jedes $\delta \in (0,1)$ gibt es eine stetige Funktion $u_i : X \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $s,t \in T$:*

$$(x,t) \succeq_i (y,s) \text{ gdw. } \delta^t u_i(x) \geq \delta^s u_i(y).$$

Beweis. Ohne Beweis. □

Die ersten zwei Runden eines Verhandlungsspiels mit abwechselnden Vorschlägen können etwa wie folgt visualisiert werden:



Beispiel 112 (Kuchenverteilspiel mit zwei Spielern)**.** Die Menge der möglichen Verhandlungsergebnisse ist $X = \{ (x_1, x_2) \mid x_i \geq 0 \text{ für } i \in \{ 1, 2 \} \text{ und } x_1 + x_2 = 1 \}$. Für die Präferenzrelationen gilt, dass $(x, t) \succeq (y, t)$ gdw. $x_i \geq y_i$ sowie $((0,1),0) \sim_1 D$ und $((1,0),0) \sim_2 D$. D.h. man kann $\preceq_i$ durch $\delta_i^t w_i(x_i)$ repräsentieren, wobei $0 < \delta_i < 1$, w_i monoton wachsend und stetig sowie $w_i(0) = 0$ ist.

7.2 Teilspielperfekte Gleichgewichte

Definition 113 (Pareto-Grenze)**.** Die **Pareto-Grenze** einer Menge von Vereinbarungen X besteht aus den Elementen $x \in X$, für die es kein $y \in X$ mit $(y, 0) \succ_i (x, 0)$ für alle $i \in \{ 1, 2 \}$ gibt. Ein solches x heißt **effiziente Vereinbarung**.

Zur Beschreibung der teilspielperfekten Gleichgewichte in Verhandlungsspielen mit abwechselnden Vorschlägen wollen wir zunächst einige zusätzliche Annahmen machen:

A1 Keine zwei verschiedenen Einigungen werden gleich bewertet, d.h. es gibt kein Paar $(x, y) \in X^2$ mit $x \neq y$ und $(x, 0) \sim_i (y, 0)$ für beide Spieler $i \in \{ 1, 2 \}$.
A2 Für $i, j \in \{ 1, 2 \}$ und $i \neq j$ gilt $(b^i, 1) \sim_j (b^i, 0) \sim_j D$, wobei b^i die für i beste Vereinbarung ist.
A3 Die Pareto-Grenze ist strikt monoton, d.h. für effiziente Vereinbarungen x existiert keine Vereinbarung $y \neq x$ mit $(y, 0) \succeq_i (x, 0)$ für alle $i \in \{ 1, 2 \}$.
A4 Es existiert ein eindeutiges Paar (x^*, y^*) von effizienten Vereinbarungen, für das gilt: $(x^*, 1) \sim_1 (y^*, 0)$ und $(y^*, 1) \sim_2 (x^*, 0)$.

Satz 37. *Ein Verhandlungsspiel mit abwechselnden Vorschlägen $(X, (\succeq_i)_{i \in N})$, das A1 bis A4 erfüllt, hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht. Sei (x^*, y^*) das Paar, für das gilt, dass $(x^*, 1) \sim_1 (y^*, 0)$ und $(y^*, 1) \sim_2 (x^*, 0)$. Dann*

1. *schlägt Spieler 1 in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht x^* vor, akzeptiert y^* und jeden Vorschlag y mit $(y, 0) \succeq_1 (y^*, 0)$ und weist jeden Vorschlag y mit $(y, 0) \prec_1 (y^*, 0)$ zurück und*
2. *schlägt Spieler 2 in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht y^* vor, akzeptiert x^* und jeden Vorschlag x mit $(x, 0) \succeq_2 (x^*, 0)$ und weist jeden Vorschlag x mit $(x, 0) \prec_2 (x^*, 0)$ zurück.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass das beschriebene Strategieprofil ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist. Da Verhandlungsspiele mit abwechselnden Vorschlägen die Ein-Schritt-Abweichungs-Eigenschaft besitzen (ohne Beweis), genügt es zu prüfen, ob eine einschrittige Abweichung in einem Teilspiel zu einer Verbesserung führen kann. Wir untersuchen dies o.B.d.A. nur für Spieler 2. Betrachte eine Historie der Form $h = \langle x^0, R, \dots, R, x^t \rangle$, nach der Spieler 2 am Zug ist. Akzeptiert er den Vorschlag, so ist der Ausgang (x^t, t), weist er ihn zurück, ist der Ausgang $(y^*, t{+}1)$, weil Spieler 2 im nächsten Schritt y^* vorschlägt und Spieler 1 diesen Vorschlag annimmt. Da die Präferenzrelation stationär ist, gilt $(x^t, t) \succeq_2 (y^*, t+1)$ genau dann, wenn $(x^t, 0) \succeq_2 (y^*, 1)$. Nach A4 gilt außerdem $(y^*, 1) \sim_2 (x^*, 0)$. Da Spieler 2 genau dann akzeptiert, wenn $(x^t, 0) \succeq_2 (x^*, 0)$, ist die Entscheidungsregel von Spieler 2 optimal und eine einschrittige Abweichung bringt keinen zusätzlichen Nutzen.

Betrachte nun eine Historie der Form $h = \langle x^0, R, \dots, R, x^{t-1}, R \rangle$, nach der Spieler 2 am Zug ist. Macht er einen für ihn selbst schlechteren Vorschlag als y^*, d.h. ist $(x^t, 0) \prec_2 (y^*, 0)$, so ist sein Ergebnis schlechter als bei einem Vorschlag von y^*, wenn Spieler 1 den Vorschlag annimmt, und höchstens so gut wie bei einem Vorschlag von y^*, wenn Spieler 1 ablehnt, denn dann ist der Ausgang $(x^*, t+1) \sim_2 (y^*, t+2) \preceq_2 (y^*, t)$. Macht Spieler 2 einen für ihn selbst besseren Vorschlag als y^*, d.h. ist $(x^t, 0) \succ_2 (y^*, 0)$, lehnt Spieler 1 ab, weil y^* effizient ist, und das Ergebnis ist wie oben $(x^*, t+1)$.

Wir müssen noch zeigen, dass das teilspielperfekte Gleichgewicht eindeutig ist. Da die Präferenzen stationär sind, sind alle Teilspiele G_i, in denen Spieler i mit einem Vorschlag beginnt, identisch. Sei $\delta \in (0,1)$ und $u_i : X \to \mathbb{R}$ für $i \in \{1,2\}$ so, dass $\delta^t u_i(x)$ die Präferenzrelation $\succeq_i$ repräsentiert. Seien außerdem für $i \in \{1,2\}$:

$$\begin{aligned} M_i(G_i) &:= \sup\{\, \delta^t u_i(x) \mid \text{ex. ein TPG von } G_i \text{ mit dem Ergebnis } (x,t)\,\} \quad \text{und} \\ m_i(G_i) &:= \inf\{\, \delta^t u_i(x) \mid \text{ex. ein TPG von } G_i \text{ mit dem Ergebnis } (x,t)\,\}. \end{aligned}$$

In einem ersten Schritt zeigen wir, dass $M_1(G_1) = m_1(G_1) = u_1(x^*)$ und $M_2(G_2) = m_2(G_2) = u_2(y^*)$. Sei dazu φ eine Funktion, die jeweils die Paare der Pareto-Grenze beschreibt, d.h. die $\varphi(u_1(x)) = u_2(x)$ für alle effizienten $x \in X$ erfüllt. Da X zusammenhängend und $\preceq_i$ eine stetige Relation ist, ist der Wertebereich von φ ein Intervall, φ ist stetig und wegen A3 ist φ eine Bijektion und strikt monoton fallend.

Falls Spieler 1 den Vorschlag von Spieler 2 im Teilspiel G_2 zurückweist, bekommt Spieler 1 nicht mehr als $\delta M_1(G_1)$, d.h. Spieler 1 muss jeden Vorschlag, der ihm einen Nutzen von mehr als $\delta M_1(G_1)$ bringt, akzeptieren. Also bekommt Spieler 2 in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht von G_2 nicht weniger als $\varphi(\delta M_1(G_1))$, d.h.

$$m_2(G_2) \geq \varphi(\delta M_1(G_1)) \tag{7.1}$$

In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht von G_1 erhält Spieler 2 mindestens $\delta m_2(G_2)$, da er den ersten Vorschlag von Spieler 1 zurückweisen kann, d.h. Spieler 1 kann nicht mehr als $\varphi^{-1}(\delta m_2(G_2))$ erhalten, kurz

$$M_1(G_1) \leq \varphi^{-1}(\delta m_2(G_2)) \tag{7.2}$$

Damit und mit Ungleichung (7.1) erhalten wir, da φ strikt monoton fallend ist, dass

$$M_1(G_1) \leq \varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta M_1(G_1))) \tag{7.3}$$

Da es ein teilspielperfektes Gleichgewicht von G_1 gibt, bei dem x^* sofort akzeptiert wird, ist $M_1(G_1) \geq u_1(x^*)$. Also ist noch zu zeigen, dass auch $M_1(G_1) \leq u_1(x^*)$ gilt. Wegen A2 haben wir $\delta u_2(b^1) = u_2(b^1)$, d.h. $u_2(b^1) = 0$. Wegen A3 haben wir $\delta\varphi(\delta u_1(b^1)) > 0 = u_2(b^1) = \varphi(u_1(b^1))$. Da φ strikt monoton fallend ist, folgt

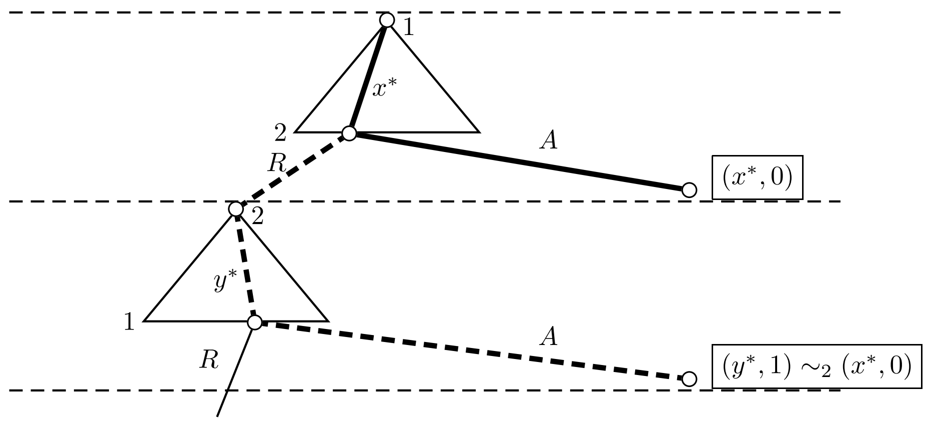
$$u_1(b^1) > \varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta u_1(b^1))). \tag{7.4}$$

Mit der Stetigkeit von φ und Ungleichung (7.3) folgt daraus, dass es ein U_1 mit $M_1(G_1) \leq U_1 < u_1(b^1)$ und $U_1 = \varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta U_1))$ gibt. Falls $M_1(G_1) > u_1(x^*)$, ist $U_1 \neq u_1(x^*)$. Konstruiere a^* und b^* als effiziente Vorschläge mit $u_1(a^*) = U_1$ und $u_1(b^*) = \delta u_1(a^*)$, d.h. $(a^*, 1) \sim_1 (b^*, 0)$. Außerdem gilt $u_2(b^*) = \varphi(\delta u_1(a^*)) = \varphi(\delta U_1)$ und $u_2(a^*) = \varphi(u_1(a^*)) = \varphi(U_1) = \varphi(\varphi^{-1}(\delta\varphi(\delta U_1))) = \delta\varphi(\delta U_1)$ und damit $\delta u_2(b^*) = u_2(a^*)$, also $(b^*, 1) \sim_2 (a^*, 0)$. Damit ist wegen $a^* \neq x^*$ die Eindeutigkeit von (x^*, y^*) aus A4 verletzt, d.h. die Annahme

$M_1(G_1) > u_1(x^*)$ muss falsch sein. Damit folgt $M_1(G_1) = u_1(x^*)$. Eine ähnliche Argumentation führt zu $m_1(G_1) = u_1(x^*)$, $M_2(G_2) = u_2(y^*)$ und $m_2(G_2) = u_2(y^*)$.

In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht von G_1 schlägt Spieler 1 x^* vor und Spieler 2 nimmt diesen Vorschlag an, denn der Nutzen von Spieler 1 beträgt nach der obigen Argumentation $u_1(x^*)$ und der Nutzen von Spieler 2 mindestens $\delta u_2(y^*) = u_2(x^*)$, da Spieler 2 den Vorschlag zurückweisen und dann den Nutzen $u_2(y^*)$ in G_2 erhalten könnte. Wegen A1 und der Effizienz von x^* muss Spieler 1 x^* vorschlagen und Spieler 2 akzeptieren.

Würde Spieler 2 ablehnen, dann selbst y^* vorschlagen und Spieler 1 dies akzeptieren, hätte er zwar denselben Nutzen wie in dem Fall, dass er schon in der ersten Runde den Vorschlag x^* akzeptiert, der Nutzen von Spieler 1 wäre jedoch geringer und die Strategien damit nicht im Gleichgewicht. Spieler 1 könnte profitabel abweichen, indem er gleich zu Beginn einen anderen Vorschlag macht.



In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht akzeptiert Spieler 2 jeden Vorschlag x mit $(x, 0) \succeq_2 (x^*, 0)$ und weist jeden Vorschlag x mit $(x, 0) \prec_2 (x^*, 0)$ zurück, denn eine Ablehnung von Spieler 2 führt zu G_2 und damit zu Nutzen $u_2(y^*)$ für Spieler 2. Wegen $u_2(x^*) = \delta u_2(y^*)$ muss Spieler 2 jeden Vorschlag x mit $(x, 0) \succeq_2 (x^*, 0)$ akzeptieren und jeden Vorschlag x mit $(x, 0) \prec_2 (x^*, 0)$ zurückweisen. $\square$

8 Spieltheorie in Multiagentensystemen

8.1 Überblick

In diesem Kapitel wollen wir der Frage nachgehen, wie unabhängig entwickelte, eigennützige Agenten kooperieren können. Das wichtigste Konzept sind wie im letzten Kapitel Verhandlungen, genauer: Verhandlungen über eine mögliche Zusammenarbeit der Agenten.

Beispiel 114. Zwei benachbarte Familien müssen ihre Kinder zur Schule zu bringen, wobei auch Kinder der anderen Familie mitgenommen werden können. Dann stellt sich die Frage, wer wann welche Kinder fährt und wie ein entsprechender Plan ausgehandelt wird.

Die Verhandlungsergebnisse können durch das *Verhandlungsprotokoll*, die *erlaubten Verhandlungsergebnisse* und die *Verhandlungsstrategien* der Agenten beeinflusst werden.

Zu den besonders wünschenswerten Eigenschaften von Verhandlungsmechanismen gehören

1. Effizienz, d.h. das Verhandlungsergebnis sollte Pareto-optimal oder global optimal sein. Ein Ergebnis ist Pareto-optimal, wenn es kein anderes Ergebnis gibt, für das ein Spieler mehr bekommen kann und bei dem alle anderen nicht weniger erhalten, und es ist global optimal, wenn es die Summe der Nutzenwerte der beteiligten Spieler maximiert,
2. Stabilität, d.h. es sollte keine Belohnung für eine Abweichung von der Konvention geben,
3. Einfachheit, d.h. es sollte möglichst wenig Berechnungs- und Kommunikationsaufwand nötig sein,
4. Verteiltheit, d.h. es sollte keine zentrale Steuerungsinstanz geben (eine zentrale Kontrollinstanz ist jedoch evtl. sinnvoll), sowie
5. Symmetrie, d.h. gleichartige Agenten sollten gleich behandelt werden.

Verhandlungen können in unterschiedlichen Domänen stattfinden, die sich grob in drei Typen unterteilen lassen, nämlich

Task-orientierte Domänen (TOD): Es gibt eine Menge von zugewiesenen Aufgaben, die neu verteilt werden können. Jeder Agent kann jede Aufgabe erfüllen. Es gibt keine Konflikte zwischen den Aufgaben und alle Verhandlungspartner können nur gewinnen. Verhandlungen in Task-orientierten Domänen entsprechen dem monotonen Planungsproblem mit mehreren Agenten.

Zustands-orientierte Domänen (ZOD): Jeder Agent möchte einen Zielzustand erreichen und es kann Konflikte geben zwischen den Zielen verschiedener Agenten geben, die aufgelöst werden müssen. Verhandlungen in Zustands-orientierten Domänen entsprechen normaler Handlungsplanung.

Wert-orientierte Domänen (WOD): Wie Zustands-orientierte Domänen, jedoch haben hier die Zustände Bewertungen durch die Agenten, die dadurch zu Kompromissen kommen können. Verhandlungen in Wert-orientierten Domänen entsprechen entscheidungstheoretischem Planen (MDPs).

Im Folgenden werden einige wichtige vereinfachende Annahmen getroffen:

1. die Agenten maximieren ihren *erwarteten* Nutzen,
2. Verhandlungen finden isoliert statt, haben also keine Auswirkungen auf zukünftige Verhandlungen,
3. die Nutzenwerte der verschiedenen Agenten sind vergleichbar, d.h. es gibt eine gemeinsame „Währung“,
4. die Fähigkeiten der Agenten sind symmetrisch, d.h. alle Agenten können das gleiche,
5. öffentlich abgegebene Verpflichtungen werden eingehalten und
6. es findet kein *expliziter* Transfer von Nutzen statt.

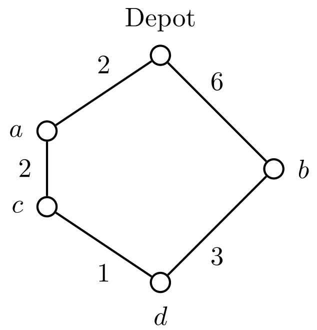
8.2 Task-orientierte Domänen

Definition 115 (Task-orientierte Domäne)**.** Eine **Task-orientierte Domäne (TOD)** ist ein Tupel $\langle T, N, c\rangle$. Dabei ist

- T die Menge aller möglichen **Aufgaben**,
- N die endliche, nicht-leere Menge von **Agenten** und
- $c : [\mathrm{Pot}(T)] \mapsto \mathbb{R}^+$ die **Kostenfunktion**. $[\mathrm{Pot}(T)]$ ist dabei die Menge aller *endlichen* Teilmengen von T. c ist monoton, d.h. für $X \subseteq Y$ ist $c(X) \leq c(Y)$ und $c(\varnothing) = 0$.

Definition 116 (Begegnung)**.** Eine **Begegnung** in einer TOD $\langle T, N, c\rangle$ ist ein Profil $(T_1, \ldots, T_{|N|})$ von endlichen Teilmengen von T. Dabei sind die Elemente von T_i die von Agent i zu erledigenden Aufgaben.

Beispiel 117 (Logistik-Domäne)**.** Agenten müssen Container von einem zentralen Depot zu Lagerhäusern transportieren, deren Lage durch einen gewichteten Graphen $G = (V, E)$ beschrieben ist. Sie können vor dem Start im zentralen Depot ohne Kosten Container tauschen. Die Task-Menge ist die Menge der Knoten V. Für $X \subseteq V$ sind die Kosten $c(X)$ die Länge eines minimal langen am Depot beginnenden Pfades, der alle Knoten aus X enthält. Die Agenten brauchen nicht zum Depot zurückzukommen. Der folgende Graph repräsentiert eine mögliche Instanz der Logistik-Domäne:



Besteht die Begegnung aus den Aufgabenmengen $T_1 = \{a, c\}$ und $T_2 = \{b, d\}$, ist der kürzeste Weg für Agent 2, um b und d zu erreichen, der Weg vom Depot über a, c und d nach b mit Kosten 8. Der Weg ist um eine Einheit kürzer als der vom Depot über b nach d.

Also könnte Agent 2 ohne weitere Kosten auf seinem Weg noch die Aufgaben a und c von Agent 1 mit erledigen.

Beispiel 118 (Postboten-Domäne)**.** Die Postboten-Domäne ist identisch mit der Logistik-Domäne, mit der Ausnahme, dass die Agenten am Ende zum Depot zurückkehren müssen.

Beispiel 119 (Datenbankanfrage-Domäne)**.** Agenten greifen mit SQL-Anfragen auf eine Datenbank zu. Sie können Resultate von Anfragen und Teilanfragen ohne Kosten untereinander austauschen. Die Taskmenge ist die Menge aller SQL-Anfragen, die Kostenfunktion ordnet einer Menge von Anfragen die Anzahl aller elementaren Datenbank-Operationen zu, die zur Beantwortung der Anfragen durchgeführt werden müssen.

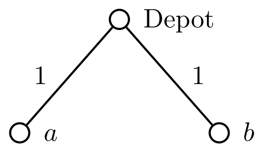
8.2.1 Verhandlungsmechanismen für Task-orientierte Domänen

Im weiteren sei immer $N = \{1, 2\}$, da in diesem Fall mögliche Koalitionen zwischen Agenten nicht berücksichtigt werden müssen.

Vereinbarungen und Verhandlungsmenge

Definition 120 (Reine Vereinbarung)**.** Sei (T_1, T_2) eine Begegnung in der Task-orientierten Domäne $\langle T, \{1, 2\}, c\rangle$. Dann heißt ein Profil (D_1, D_2) von Taskmengen eine **reine Vereinbarung** für (T_1, T_2), falls $D_1 \cup D_2 = T_1 \cup T_2$. Die Kosten der Vereinbarung für Agent $k \in \{1, 2\}$ sind $C_k(D_1, D_2) = c(D_k)$.

Beispiel 121. Betrachte die folgende Instanz der Logistik-Domäne mit $T_1 = \{a, b\}$ und $T_2 = \{a\}$:



Zu den möglichen Aufgabenverteilungen mit $D_1 \cup D_2 = T_1 \cup T_2 = \{a, b\}$ gehören

$$(\varnothing, \{a, b\}), (\{a\}, \{b\}), (\{a, b\}, \varnothing), (\{a, b\}, \{a, b\}), \ldots,$$

insgesamt neun mögliche Vereinbarungen.

Definition 122 (Nutzen einer Vereinbarung)**.** Sei (T_1, T_2) eine Begegnung in der Task-orientierten Domäne $\langle T, \{1, 2\}, c\rangle$ und $\delta = (D_1, D_2)$ eine reine Vereinbarung für (T_1, T_2). Dann heißt

$$U_k(\delta) := c(T_k) - C_k(\delta) = c(T_k) - c(D_k)$$

Nutzen der reinen Vereinbarung δ für Spieler k und die reine Vereinbarung $K = (T_1, T_2)$ heißt **Konfliktvereinbarung**. Beachte, dass die Konfliktvereinbarung beiden Agenten Nutzen 0 bringt, da $U_k(K) = c(T_k) - C_k(K) = c(T_k) - c(T_k) = 0$.

Beispiel 123. Betrachte die Domäne und die Begegnung aus Beispiel 121 mit der Vereinbarung $(\{b\}, \{a\})$. Der Nutzen von Spieler 1 beträgt $U_1(\{b\}, \{a\}) = c(\{a, b\}) - C_1(\{b\}, \{a\}) = 3 - 1 = 2$. Spieler 2 erhält dabei Nutzen 0.

Definition 124 (Dominanz und Äquivalenz von Vereinbarungen)**.** Seien δ und δ' reine Vereinbarungen in einer Task-orientierten Domäne. Wir sagen,

- δ **dominiert** δ' ($\delta \succ \delta'$), falls $U_k(\delta) \geq U_k(\delta')$ für alle $k \in N$ und es ein $k \in N$ gibt mit $U_k(\delta) > U_k(\delta')$, und
- δ **dominiert** δ' **schwach** ($\delta \succeq \delta'$), falls $U_k(\delta) \geq U_k(\delta')$ für alle $k \in N$.
- δ heißt **äquivalent** zu δ' ($\delta \approx \delta'$), falls $\delta \succeq \delta'$ und $\delta' \succeq \delta$.

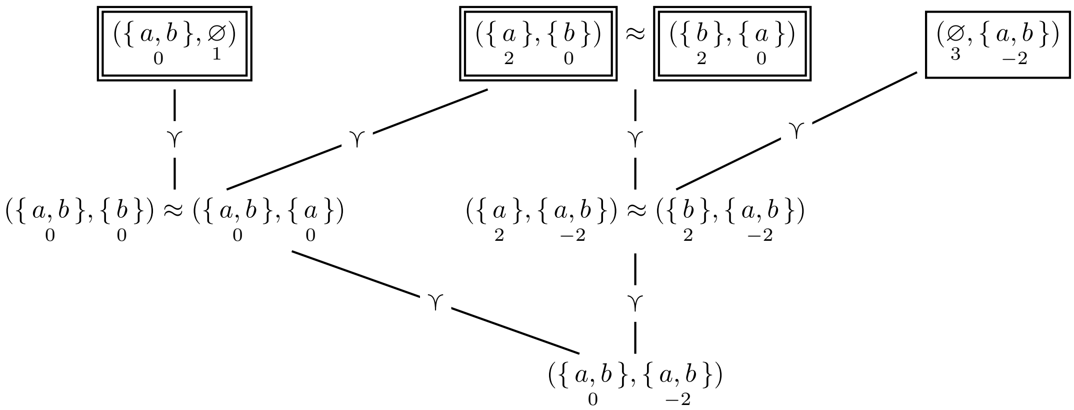
Definition 125 (Individuell rationale Vereinbarung)**.** Eine Vereinbarung δ heißt **individuell rational**, falls $\delta \succeq K$.

Beachte, dass kein Agent eine Vereinbarung akzeptieren würde, die nicht individuell rational ist.

Definition 126 (Pareto-optimale Vereinbarung)**.** Eine Vereinbarung δ heißt **Pareto-optimal**, falls es keine Vereinbarung δ' mit $\delta' \succ \delta$ gibt.

Definition 127 (Verhandlungsmenge)**.** Die Menge aller Vereinbarungen, die individuell rational und Pareto-optimal sind, heißt **Verhandlungsmenge (VM)**.

Beispiel 128. Betrachte die Domäne und die Begegnung aus Beispiel 121. Hier gilt



Dabei stellen die unter den Taskmengen von Spieler 1 bzw. 2 stehenden Zahlen den Nutzen der jeweiligen Vereinbarung für Spieler 1 bzw. 2 dar. Die Vereinbarung mit einfachem Rahmen ist Pareto-optimal, aber nicht individuell rational, die Vereinbarungen mit doppeltem Rahmen sind sowohl Pareto-optimal als auch individuell rational. Die Verhandlungsmenge für diese Begegnung besteht also aus den drei Vereinbarungen

$$(\{a,b\},\varnothing), (\{a\},\{b\}) \text{ und } (\{b\},\{a\}).$$

Satz 38. *Für jede Begegnung in einer Task-orientierten Domäne ist die Verhandlungsmenge nicht-leer.*

Beweis. Die Konfliktvereinbarung K ist individuell rational. Da es nur endlich viele mögliche Vereinbarungen gibt, kann es keine unendliche Kette $\cdots \succ \delta_2 \succ \delta_1 \succ \delta_0 = K$ geben. Also gibt es eine endliche Kette

$$\delta_n \succ \cdots \succ \delta_2 \succ \delta_1 \succ \delta_0 = K$$

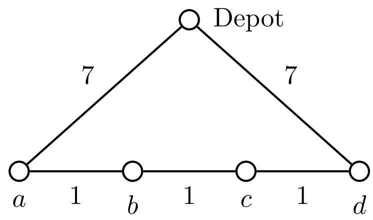
mit $n \geq 0$ so, dass kein δ_{n+1} mit $\delta_{n+1} \succ \delta_n$ existiert. Also ist δ_n Pareto-optimal. Weil aus $\delta_{i+1} \succ \delta_i$ und der individuellen Rationalität von δ_i folgt, dass auch δ_{i+1} individuell rational ist, liegt δ_n in der Verhandlungsmenge. $\square$

8.2.2 Verhandlungsprotokolle

Ein mögliches Verhandlungsprotokoll lässt sich wie folgt beschreiben:

1. In jeder Runde machen beide Agenten Angebote aus der Verhandlungsmenge.
2. Resultiert ein Angebot für einen der Agenten in nicht weniger Nutzen als dieser fordert, wird das Angebot akzeptiert, d.h. seien δ_i, δ_k die Angebote von Agent i bzw. k ($i \neq k$). Dann wird δ_i akzeptiert, falls $U_k(\delta_k) \leq U_k(\delta_i)$. Falls beide Angebote akzeptiert werden, wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit zwischen beiden ausgewählt.
3. Falls kein Angebot akzeptiert wird, dann gibt es eine weitere Runde, in der nur Angebote gemacht werden dürfen, die den anderen Agenten nicht schlechter stellen als das vorige Angebot.
4. Falls beide Agenten in einer Runde keine Zugeständnisse machen, wird die Verhandlung mit der Konfliktvereinbarung beendet.

Beispiel 129. Betrachte die folgende Begegnung in der Logistik-Domäne:



Es sind $T_1 = T_2 = \{a, b, c, d\}$. Die Verhandlungsmenge besteht aus den Vereinbarungen

Id	Vereinbarung δ	$U_1(\delta)$	$U_2(\delta)$
A	$(\{a,b,c,d\}, \varnothing)$	0	10
B	$(\{a,b,c\}, \{d\})$	1	3
C	$(\{a,b\}, \{c,d\})$	2	2
D	$(\{a\}, \{b,c,d\})$	3	1
E	$(\varnothing, \{a,b,c,d\})$	10	0

sowie den zu B, C und D symmetrischen Vereinbarungen B', C' und D'. Eine mögliche Verhandlung könnte mit diesen Vorschlägen ablaufen:

Runde t	Vorschlag δ_1^t von Agent 1	Vorschlag δ_2^t von Agent 2
1	E	A
2	E	B
3	E	C
4	D	D

Definition 130 (Monotones Zugeständnisprotokoll)**.** Sei (T_1, T_2) eine Begegnung in der Task-orientierten Domäne $\langle T, \{1,2\}, c\rangle$ mit Verhandlungsmenge V. Das **monotone Zugeständnisprotokoll** über reinen Vereinbarungen ist das extensive Spiel mit simultanen Zügen $\langle \{1,2\}, H, P, (u_i)_{i\in\{1,2\}}\rangle$, das wie folgt definiert ist:

1. H enthält alle endlichen Folgen von Vereinbarungspaaren $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\ldots,t}$, für die gilt:
   a) $\delta_i^n \in V$ für alle $i \in \{1,2\}$ und $n \in \{1,\ldots,t\}$,
   b) $U_i(\delta_j^n) \geq U_i(\delta_j^m)$ für alle $i, j \in \{1,2\}$ mit $i \neq j$ und $m, n \in \{1,\ldots,t\}$ mit $m < n$,

c) $U_i(\delta_j^n) > U_i(\delta_j^m)$ für mindestens ein $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ und alle $m, n \in \{1, \ldots, t-1\}$ mit $m < n$ sowie
d) $U_i(\delta_j^n) < U_i(\delta_i^n)$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$ mit $i \neq j$ und alle $n \in \{1, \ldots, t-1\}$.

2. Für alle nicht-terminalen Historien $h \in H \setminus Z$ gilt: $P(h) = \{1, 2\}$.
3. Für alle terminalen Historien $h = \langle \ldots, (\delta_1^*, \delta_2^*) \rangle \in Z$ definiere die **Akzeptanzmengen**

$$N_h^A = \{ i \in \{1, 2\} \mid U_i(\delta_j^*) \geq U_i(\delta_i^*) \text{ für } j \in \{1, 2\} \setminus \{i\} \}.$$

Dann gilt, dass für alle $i \in \{1, 2\}$:

$$u_i(h) = \begin{cases} 0, & \text{falls } N_h^A = \varnothing \\ U_i(\delta_2^*), & \text{falls } N_h^A = \{1\} \\ U_i(\delta_1^*), & \text{falls } N_h^A = \{2\} \\ \frac{1}{2}(U_i(\delta_1^*) + U_i(\delta_2^*)), & \text{falls } N_h^A = \{1, 2\} \end{cases}$$

Bemerkung 131. Das monotone Zugeständnisprotokoll über reinen Vereinbarungen ist endlich.

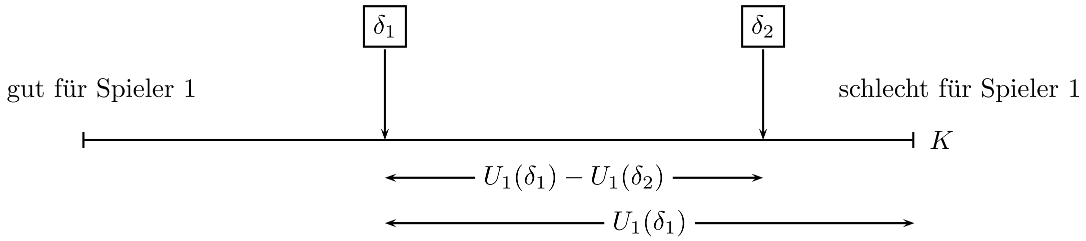
8.2.3 Verhandlungsstrategien

Sind die Verhandlungsmenge und das Verhandlungsprotokoll festgelegt, stellt sich die Frage, wie sich die Agenten bei der Verhandlung verhalten sollen. Da das monotone Zugeständnisprotokoll über reine Vereinbarungen ein extensives Spiel mit simultanen Zügen ist, sollten sie eine TPG-Strategie verfolgen – aber welche?

Beispiel 132. Betrachte die taskorientierte Domäne $\langle T, \{1, 2\}, c \rangle$ mit $T = \{p, q, r, s, t\}$ und $c(T') = |T'|$ für alle $T' \subseteq T$ und darin die Begegnung $\langle \{p, q, r, s, t\}, \{p, q, r, s, t\} \rangle$, bei der beide Spieler alle fünf Aufgaben ausführen müssen. Die Verhandlungsmenge besteht aus allen Vereinbarungen mit Nutzenprofilen in $\{(5, 0), (4, 1), (3, 2), (2, 3), (4, 1), (0, 5)\}$. Wir identifizieren im Folgenden diese Menge der möglichen Nutzenprofile mit der Verhandlungsmenge.

Angenommen, Spieler 1 bietet am Anfang $(5, 0)$ und macht keine Zugeständnisse, und Spieler 2 bietet am Anfang $(0, 5)$ und kommt Spieler 1 immer um einen minimalen Schritt entgegen. Dieses Strategieprofil ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht, aber keine zufriedenstellende Lösung. Intuitiv sollte der Spieler, der bei einem Konflikt mehr zu verlieren hat, das nächste Zugeständnis machen.

Hat etwa Spieler 1 zuletzt das Angebot δ_1 und Spieler 2 das Angebot δ_2 gemacht, so hat Spieler 1 die Differenz $U_1(\delta_1) - U_1(\delta_2)$ zu verlieren, wenn er Spieler 2 ganz entgegenkommt, und $U_1(\delta_1) - U_1(K) = U_1(\delta_1)$, wenn die Verhandlung mit der Konfliktvereinbarung endet. Hat Spieler 2 bisher nur geringe Zugeständnisse gemacht, d.h. ist $U_1(\delta_1) - U_1(\delta_2)$ ähnlich groß wie $U_1(\delta_1)$, ist Spieler 1 eher bereit, durch ein Beharren auf seinem letzten Angebot das Risiko einzugehen, die Verhandlung scheitern zu lassen, als in dem Fall, dass Spieler 2 schon große Zugeständnisse gemacht hat und $U_1(\delta_1) - U_1(\delta_2)$ im Verhältnis zu $U_1(\delta_1)$ klein ist:



Definition 133 (Risikobereitschaft)**.** Betrachte die nicht-terminale Historie $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\ldots,t}$. Die **Risikobereitschaft** von Spieler i ist definiert als

$$\mathit{Risiko}_i^t := \frac{U_i(\delta_i^t) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)}.$$

Je höher der *Risiko*-Wert eines Spielers ist, desto eher geht er ein Risiko ein.

Definition 134 (Zeuthen-Strategie)**.** Die **Zeuthen-Strategie** für Spieler i legt das folgende Verhalten des Agenten fest:

1. Biete zu Beginn eine Vereinbarung δ_i^1 aus der Verhandlungsmenge, die den Nutzen U_i maximiert.
2. Nach der Historie $(\delta_1^n, \delta_2^n)_{n=1,\ldots,t}$
   - biete wieder $\delta_i^{t+1} = \delta_i^t$, falls $\mathit{Risiko}_i^t > \mathit{Risiko}_j^t$ für $i \neq j$,
   - ansonsten betrachte alle δ aus der Verhandlungsmenge mit

     $$U_j(\delta_i^t) < U_j(\delta) \leq U_j(\delta_j^t)$$

     und

     $$\underbrace{\frac{U_i(\delta) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta)}}_{\text{„}\mathit{Risiko}_i^{t+1}\text{“}} \geq \underbrace{\frac{U_j(\delta_j^t) - U_j(\delta)}{U_j(\delta_j^t)}}_{\text{„}\mathit{Risiko}_j^{t+1}\text{“}}.$$

     Biete dann unter diesen Vereinbarungen ein solches δ, das $U_i(\delta)$ maximiert.

Beispiel 135. Betrachte die Begegnung aus Beispiel 132. Folgen sowohl Spieler 1 als auch Spieler 2 der Zeuthen-Strategie, so ergibt sich die Verhandlung

Runde t	δ_1^t	δ_2^t	Risiko_1^t	Risiko_2^t
1	$(5,0)$	$(0,5)$	1	1
2	$(4,1)$	$(1,4)$	$3/4$	$3/4$
3	$(3,2)$	$(2,3)$	$1/3$	$1/3$
4	$(2,3)$	$(3,2)$		

Da beide Spieler in der letzten Runde ein Zugeständnis machen, wird das Verhandlungsergebnis zufällig aus den beiden Vereinbarungen $(2,3)$ und $(3,2)$ ausgewählt.

Folgt nur Spieler 1 der Zeuthen-Strategie, während Spieler 2 niemals Zugeständnisse macht, ergibt sich folgendes Bild:

Runde t	δ_1^t	δ_2^t	$Risiko_1^t$	$Risiko_2^t$
1	$(5,0)$	$(0,5)$	1	1
2	$(4,1)$	$(0,5)$	1	$4/5$
3	$(4,1)$	$(0,5)$		

Die Verhandlung endet also mit der Konfliktvereinbarung.

Satz 39 (Satz von Harsanyi)**.** *Wenn beide Agenten die Zeuthen-Strategie verfolgen, dann einigen sie sich auf eine Vereinbarung, die das Produkt der Nutzenwerte der beiden Spieler maximiert.*

Lemma 40. *Spieler i macht nach t Schritten ein Zugeständnis gdw. $\pi(\delta_i^t) \leq \pi(\delta_j^t)$, wobei $\pi(\delta) := U_1(\delta)U_2(\delta)$.*

Beweis. Es ist

$$Risiko_i^t = \frac{U_i(\delta_i^t) - U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} = 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
Risiko_i^t \leq Risiko_j^t \quad & \text{gdw.} \quad 1 - \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \leq 1 - \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
& \text{gdw.} \quad \frac{U_i(\delta_j^t)}{U_i(\delta_i^t)} \geq \frac{U_j(\delta_i^t)}{U_j(\delta_j^t)} \\
& \text{gdw.} \quad U_i(\delta_j^t) \cdot U_j(\delta_j^t) \geq U_j(\delta_j^t) \cdot U_i(\delta_j^t) \\
& \text{gdw.} \quad \pi(\delta_j^t) \geq \pi(\delta_i^t).
\end{aligned}$$

□

Lemma 41. *Macht Spieler i nach t Schritten ein Zugeständnis, so gilt $\pi(\delta_i^{t+1}) \geq \pi(\delta_j^t)$.*

Beweis. Analog zum vorherigen Lemma. □

Beweis des Satzes von Harsanyi. Aus den beiden Lemmata folgt, dass die Abbildung $n \mapsto \max\{\pi(\delta_1^n), \pi(\delta_2^n)\}$ monoton wächst, denn macht Spieler i ein Zugeständnis, so ist $\pi(\delta_i^t) \leq \pi(\delta_j^t) \leq \pi(\delta_i^{t+1})$, und macht er kein Zugeständnis, ist $\pi(\delta_i^t) = \pi(\delta_i^{t+1})$. Für die letzten Angebote gilt $\pi(\delta_1^t) = \pi(\delta_2^t)$.

Angenommen, die Spieler einigen sich auf $\delta^* \in V$, aber es gibt ein $\delta' \in V$ mit $\pi(\delta') > \pi(\delta^*)$. Dann gibt es ein $i \in \{1, 2\}$ mit $U_i(\delta') > U_i(\delta^*)$, denn angenommen, $U_i(\delta') \leq U_i(\delta^*)$ für alle $i \in \{1, 2\}$. Dann wäre wegen $U_1(\delta'), U_2(\delta'), U_1(\delta^*), U_2(\delta^*) \geq 0$ (δ', δ^* individuell rational) auch $\pi(\delta') \leq \pi(\delta^*)$.

Sei dann $n \in \mathbb{N}$ der erste Schritt, in dem Spieler i zum ersten Mal eine Vereinbarung δ_i^n mit $U_i(\delta_i^n) < U_i(\delta')$ vorschlägt, d.h. dass $U_i(\delta_i^n) < U_i(\delta')$ und $U_i(\delta_i^{n-1}) \geq U_i(\delta')$. Wegen der Monotonie gilt $\pi(\delta') > \pi(\delta_i^n) \geq \pi(\delta_i^{n-1})$. Da $\pi(\delta') > \pi(\delta_i^{n-1})$ und $U_i(\delta_i^{n-1}) \geq U_i(\delta')$, muss $U_j(\delta') > U_j(\delta_i^{n-1})$ ($j \neq i$) gelten, d.h. auch mit δ' statt δ_i^n käme Spieler i Spieler j in Schritt n entgegen, δ' wäre also eine gültige Wahl gewesen. Wegen $U_i(\delta_i^n) < U_i(\delta')$ hätte Spieler i im Widerspruch zum tatsächlichen Verlauf der Verhandlung also nicht δ_i^n, sondern δ' vorgeschlagen.

Somit maximiert die Vereinbarung δ^*, auf die sich die Spieler einigen, den Produktnutzen π. $\square$

Erfüllt die Zeuthen-Strategie im monotonen Zugeständnisprotokoll die oben erwähnten wünschenswerten Eigenschaften von Verteilungsmechanismen? Effizienz, Verteiltheit, Symmetrie sowie zu einem gewissen Grad auch Einfachheit sind gegeben. Ist die Zeuthen-Strategie im monotonen Zugeständnisprotokoll aber auch stabil?

Satz 42. *Die Zeuthen-Strategie ist nicht stabil, d.h. ein Profil aus Zeuthen-Strategien ist im allgemeinen kein teilspielperfektes Gleichgewicht.*

Beweis. Es genügt, ein Beispiel anzugeben, in dem die Zeuthen-Strategie nicht stabil ist.

Betrachte dazu die Instanz der Postboten-Domäne mit einem Startknoten und einem Knoten a, der sich in Distanz 1 vom Depot befindet sowie die Begegnung $(\{a\},\{a\})$ in dieser Domäne. Die Verhandlungsmenge besteht aus den Vereinbarungen $(\{a\},\varnothing)$ und $(\varnothing,\{a\})$.

In der ersten Verhandlungsrunde schlägt Spieler 1 die Vereinbarung $\delta_1^0 = (\varnothing,\{a\})$ und Spieler 2 die Vereinbarung $\delta_2^0 = (\{a\},\varnothing)$ vor. Damit ist $\mathit{Risiko}_1^0 = \mathit{Risiko}_2^0 = 1$.

Die Zeuthen-Strategie schreibt vor, dass $\delta_1^1 = (\{a\},\varnothing)$ und $\delta_2^1 = (\varnothing,\{a\})$ sein müssen. Damit hat Spieler $i \in \{1,2\}$ den erwarteten Nutzen 1, denn beide Spieler nehmen den Vorschlag des anderen an und es wird eine Münze geworfen, um zu bestimmen, welche Vereinbarung gewählt wird.

Würde jedoch etwa Spieler 1 von der Zeuthen-Strategie abweichen und im letzten Schritt in dem Wissen, dass Spieler 2 ein Zugeständnis machen wird, selbst kein Zugeständnis machen, d.h. $\delta_1^1 = \delta_1^0 = (\varnothing,\{a\})$ anbieten, so würden sich die beiden Spieler auf diesen Vorschlag einigen und es wäre $U_1(\delta_1^1) = 2 > 1$, die Abweichung wäre also für Spieler 1 profitabel. $\square$

Um die Zeuthen-Strategie stabil zu machen, kann man den letzten Schritt des Verhandlungsprotokolls als strategisches Spiel (Falke oder Taube) betrachten, wobei δ_1 und δ_2 die Vorschläge des vorletzten Schritts sind. Dann erhält man

		Spieler 2	
		Beharren	Zugeständnis
Spieler 1	Beharren	$0, 0$	$U_1(\delta_1), U_2(\delta_1)$
	Zugeständnis	$U_1(\delta_2), U_2(\delta_2)$	$\frac{U_1(\delta_2)+U_1(\delta_1)}{2}, \frac{U_2(\delta_2)+U_2(\delta_1)}{2}$

Beharren beide Spieler auf ihren früheren Vorschlägen, endet die Verhandlung mit der Konfliktvereinbarung und Nutzen 0 für beide Spieler. Macht genau einer ein Zugeständnis, einigen sie sich auf einen Vorschlag mit dem Nutzen des letzten Vorschlags des anderen Spielers, und machen beide ein Zugeständnis, wird wieder eine Münze geworfen bzw. werden die Nutzenwerte der beiden Vorschläge gemittelt.

Dieses Spiel hat ein gemischtes Nash-Gleichgewicht, das beide Spieler „gleichberechtigt“ behandelt. Dieses nehmen wir als letzten Schritt.

Definition 136 (Erweiterte Zeuthen-Strategie)**.** Die **erweiterte Zeuthen-Strategie** ist die Zeuthen-Strategie, wobei der letzte Schritt eine gemischte Nash-Gleichgewichts-Strategie für das Falke-oder-Taube-Spiel ist.

Da man nur symmetrische Mechanismen haben möchte, sind die beiden reinen Nash-Gleichgewichte des Spiels hier keine Gleichgewichte. Absprachen sind in diesem Protokoll nicht erlaubt.

Satz 43. *Das erweiterte Zeuthen-Strategieprofil ist ein teilspielperfektes Gleichgewicht im monotonen Zugeständnisprotokoll.*

Beweis. Im letzten Schritt herrscht nach Definition der Strategie immer ein Gleichgewicht. Für frühere Verhandlungsrunden muss gezeigt werden, dass alle möglichen Abweichungen von der erweiterten Zeuthen-Strategie nicht profitabel sind. Folgende Fälle sind in Runde t möglich:

1. Spieler i macht kein Zugeständnis, obwohl es von der erweiterten Zeuthen-Strategie gefordert wird. Ist $Risiko_i^t < Risiko_j^t$, so endet die Verhandlung in der Konfliktvereinbarung, d.h. Spieler i erhöht seinen Nutzen dadurch nicht. Ist $Risiko_i^t = Risiko_j^t$, so wird das Zugeständnis von Spieler i nur in die nächste Runde verschoben oder die nächste Runde endet in der Konfliktvereinbarung.
2. Spieler i macht ein Zugeständnis, obwohl die erweiterte Zeuthen-Strategie dies nicht fordert. Dadurch kann er möglicherweise einen geringeren Nutzen bekommen, aber auf keinen Fall einen höheren.
3. Spieler i macht, wie von der erweiterten Zeuthen-Strategie gefordert, ein Zugeständnis, jedoch ein stärkeres als notwendig wäre. Auch hier kann er sich nicht verbessern.
4. Spieler i macht ein kleineres Zugeständnis als gefordert. Dann folgt ein weiteres Zugeständnis oder ein Konflikt im nächsten Schritt. Also ebenfalls keine Verbesserung.

Damit ist klar, dass sich Abweichungen an keinem Punkt lohnen und somit die erweiterte Zeuthen-Strategie eine teilspielperfekte Strategie ist. □

Von den wünschenswerten Eigenschaften von Verhandlungsmechanismen erfüllt das monotone Zugeständnisprotokoll mit der erweiterten Zeuthen-Strategie die Forderungen nach Stabilität, Verteiltheit und Symmetrie. Die Einfachheit ist nur eingeschränkt erfüllt, weil man alle u.U. exponentiell vielen Elemente der Verhandlungsmenge kennen muss. Pareto-Optimalität liegt nicht vor, da das Verfahren wegen des gemischten Nash-Gleichgewichtes im letzten Schritt auch in der Konfliktvereinbarung enden kann, selbst wenn eine bessere Vereinbarung möglich wäre.

Ein-Schritt-Protokoll

Ein alternativer Ansatz, der das Verfahren abkürzt, besteht darin, dass beide Spieler jeweils nur einen Vorschlag machen dürfen und das Angebot mit dem höheren Produkt der Nutzenwerte angenommen wird. Falls Gleichheit herrscht, wird eine Münze geworfen. Eine zu diesem Protokoll passende Strategie ist es, eine Vereinbarung mit maximalem eigenen Nutzen unter den Vereinbarungen vorzuschlagen, die das Produkt der Nutzenwerte maximieren. Dies ist eine TPG-Strategie, d.h. der Verhandlungsmechanismus ist stabil.

Diese Idee führt zu der folgenden verallgemeinernden Definition:

Definition 137 (Produktmaximierender Mechanismus)**.** Ein **produktmaximierender Mechanismus** ist eine solche Kombination aus einem Verhandlungsprotokoll und einer dazu passenden Strategie, dass das Protokoll symmetrisch ist, die Strategie mit sich selbst ein Gleichgewicht bildet und der Produktnutzen maximiert wird. Gibt es mehrere Vereinbarungen, die den Produktnutzen maximieren, muss das Verhandlungsergebnis unter diesen Vereinbarungen zusätzlich die Summe der Nutzenwerte maximieren. Gibt es auch mehrere summenmaximierende unter den produktmaximierenden Vereinbarungen, so kann das Protokoll zufällig aus diesen auswählen. Keiner der Spieler darf einen negativen Nutzen erhalten.

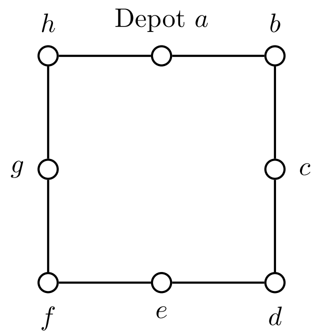
Ein produktmaximierender Mechanismus hat immer eine Pareto-optimale und individuell rationale Vereinbarung als Ergebnis.

8.2.4 Betrugsverhindernde Protokolle

Unter Umständen sind nicht alle Informationen bekannt, insbesondere kann Unklarheit über die Aufgaben der anderen Spieler bestehen. Deshalb macht am Anfang jeder Spieler seine Aufgaben öffentlich bekannt. Diese Bekanntgabe macht aber eine strategische Endscheidung erforderlich: Soll man alle Aufgaben bekannt machen? Soll man neue Aufgaben dazuerfinden?

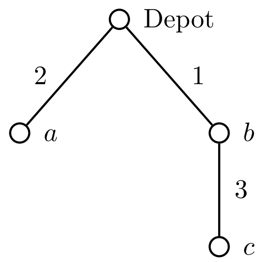
Im Weiteren wird angenommen, dass öffentliche Verpflichtungen eingehalten werden und die Agenten sich regelkonform verhalten, es aber private Entscheidungen und private Aufgaben geben kann.

Beispiel 138 (Vorteil durch verborgene Aufgaben)**.** Betrachte die folgende Begegnung in der Postboten-Domäne mit Kantenlängen 1:



Es sind $T_1 = \{ b, f \}$ und $T_2 = \{ e \}$, d.h. $c(T_1) = c(T_2) = 8$. Die einzigen Pareto-optimalen und individuell rationalen Lösungen sind $(\{ b, f, e \}, \varnothing)$ und $(\varnothing, \{ b, f, e \})$. Da zwischen den beiden Vereinbarungen immer ein Münzwurf entscheiden muss, ist der erwartete Nutzen beider Spieler $\frac{1}{2}(8 + 0) = 4$. Verschweigt nun Spieler 1 die Aufgabe b, so befinden sich die Spieler aus Sicht von Spieler 2 ist der Begegnung $(\{ f \}, \{ e \})$. Die einzige Lösung dieser Begegnung ist $(\varnothing, \{ f, e \})$. Spieler 1 muss zwar seine verborgene Aufgabe ausführen, was ihm Kosten 2 verursacht (und damit Nutzen $8 - 2 = 6$ bringt), aber für ihn besser ist als der Fall, dass er die Aufgabe b nicht verschweigt und einen erwarteten Nutzen von 4 hat. Während also Lügen gut für das Individuum ist, ist es schlecht für die Gesellschaft bzw. den Gesamtnutzen, der um 2 vermindert wird.

Beispiel 139 (Vorteil durch vorgetäuschte Aufgaben)**.** Betrachte die folgende Begegnung in der Postboten-Domäne:



Dabei sind $T_1 = T_2 = \{ a, b \}$ und $c(T_1) = c(T_2) = 6$. Behauptet nun Spieler 1, er müsse auch Knoten c besuchen, ergibt sich die scheinbare Begegnung (T_1', T_2) mit $T_1' = \{ a, b, c \}$ und $c(T_1') = 12$.

1. echte Begegnung (T_1, T_2): mögliche Vereinbarungen sind hier $\delta_1 = (\{ a, b \}, \varnothing)$, $\delta_2 = (\{ a \}, \{ b \})$, $\delta_3 = (\{ b \}, \{ a \})$ und $\delta_4 = (\varnothing, \{ a, b \})$. Davon sind δ_1 und δ_4 nicht produktmaximierend. Der Vorschlag von Agent 1 ist δ_3, der von Agent 2 ist δ_2. Damit ergibt sich für beide Agenten ein erwarteter Nutzen von 3.
2. scheinbare Begegnung (T_1', T_2): die einzige produktmaximierende, Pareto-optimale und individuell rationale Aufteilung der Aufgaben ist $\delta_1' = (\{ b, c \}, \{ a \})$. Die Agenten müssen sich also auf die diese Vereinbarung einigen. Der behauptete und tatsächliche Nutzen von Agent 1 ist damit $U_1(\delta_1') = 4$, der von Agent 2 beträgt $U_2(\delta_1') = 2$.

Wegen $U_1(\delta_1') = 4 > 3$, dem erwarteten Nutzen in der echten Begegnung, ist die Strategie, die Wahrheit zu sagen, keine Gleichgewichtsstrategie.

8.2.5 Gemischte Vereinbarungen

Um den Raum der möglichen Vereinbarungen zu vergrößern und um manche Betrugsversuche unmöglich zu machen, kann man auch solche Vereinbarungen zulassen, bei denen zuerst die Aufgaben aufgeteilt werden und danach durch einen Münzwurf entschieden wird, welcher Spieler welchen Teil der Aufgaben übernimmt. Wir lassen also auch gemischte (randomisierte) Vereinbarungen zu.

Definition 140 (Gemischte Vereinbarung)**.** Sei (T_1, T_2) eine Begegnung in einer Task-orientierten Domäne $\langle T, \{1, 2\}, c \rangle$. Dann heißt $(D_1, D_2) : p$ mit $D_1 \cup D_2 = T_1 \cup T_2$ und $0 \leq p \leq 1$ eine **gemischte Vereinbarung**. Dabei wird mit Wahrscheinlichkeit p die Aufgabenmenge D_1 Spieler 1 und die Menge D_2 Spieler 2 zugewiesen. Mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ erhält Spieler 1 die Aufgaben aus D_2 und Spieler 2 die aus D_1. Die erwarteten Kosten für Spieler k betragen

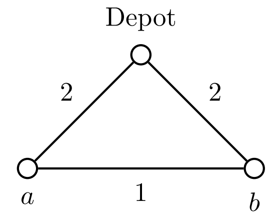
$$C_k((D_1, D_2) : p) = c(D_k) \cdot p + c(D_{3-k}) \cdot (1 - p),$$

der erwartete Nutzen

$$U_k((D_1, D_2) : p) = c(T_k) - C_k((D_1, D_2) : p).$$

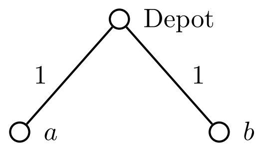
Damit wird eine größere Verhandlungsmenge möglich.

Beispiel 141. Betrachte folgende Begegnung in der Logistik-Domäne:



Dabei sind $T_1 = \{ a \}$ und $T_2 = \{ b \}$. Die einzigen Pareto-optimalen und individuell rationalen reinen Vereinbarungen sind $(\{ a \}, \{ b \})$ und $(\{ b \}, \{ a \})$, die beiden Spieler Nutzen 0 bringen. Dagegen bringt die gemischte Vereinbarung $(\{ a, b \}, \varnothing) : 0{,}5$ beiden Spielern erwartete Kosten $C_k((\{ a, b \}, \varnothing) : 0{,}5) = 3 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$ bzw. einen erwarteten Nutzen $U_k((\{ a, b \}, \varnothing) : 0{,}5) = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$.

Beispiel 142. Es gibt Begegnungen, in denen gemischte Vereinbarungen keinen höheren Nutzen als reine Vereinbarungen bringen. Betrachte dazu die Begegnung $(\{ a \}, \{ b \})$ in der Logistik-Domäne mit dem folgenden Graphen:



Hier ist $C_1(\{ a \}, \{ b \}) = C_2(\{ a \}, \{ b \}) = 1$. Die einzigen gemischten Vereinbarungen, die sich wesentlich von $(\{ a \}, \{ b \})$ und $(\{ b \}, \{ a \})$ unterscheiden, haben die Form $(\{ a, b \}, \varnothing) : p$ mit $0 \leq p \leq 1$. Für diese Vereinbarungen gilt aber $C_1((\{ a, b \}, \varnothing) : p) = 3p + 0(1 - p) = 3p$ und $C_2((\{ a, b \}, \varnothing) : p) = 0p + 3(1 - p) = 3 - 3p$, d.h. für jedes p mit $0 \leq p \leq 1$ gibt es einen Spieler k, für den $(\{ a, b \}, \varnothing) : p$ schlechter als die Konfliktvereinbarung ist. Für $p = \frac{1}{2}$ haben sogar beide Spieler höhere erwartete Kosten (1,5) als in der Konfliktvereinbarung.

Definition 143 (Subadditive Domäne)**.** Eine **subadditive Domäne** hat die Eigenschaft, dass für alle $X, Y \subseteq T$ gilt: $c(X \cup Y) \leq c(X) + c(Y)$.

In subadditiven Domänen ist oftmals Kooperation sinnvoll, denn das Zusammenlegen von Aufgaben ist – anders als in Beispiel 142 – nie mit höheren Kosten verbunden als deren getrennte Ausführung.

Beispiel 144. Die Logistik-Domäne ist nicht subadditiv, während die Postboten-Domäne subadditiv ist.

Definition 145 (Alles-oder-Nichts-Vereinbarung)**.** Eine **Alles-oder-Nichts-Vereinbarung** für eine Begegnung (T_1, T_2) ist eine gemischte Vereinbarung der Form $(T_1 \cup T_2, \varnothing) : p$ mit $0 \leq p \leq 1$.

Satz 44. *In subadditiven Domänen sind einige Alles-oder-Nichts-Vereinbarungen PMM-Lösungen.*

Beweis. In subadditiven Domänen minimieren Alles-oder-Nichts-Vereinbarungen die Summe der erwarteten Kosten. Sie maximieren also die Summe der Nutzenwerte. Ist $n \in \mathbb{R}^+$ gegeben und sucht man eine Aufteilung $n = k + j$ mit $j, k \in \mathbb{R}^+$ so, dass kj maximiert wird, so erfüllt $k = j = \frac{n}{2}$ diese Anforderung. Wähle also p so, dass für $\delta = (T_1 \cup T_2, \varnothing) : p$ gilt: $U_1(\delta) = U_2(\delta)$. Dann wird das Produkt $U_1(\delta) \cdot U_2(\delta)$ maximal, d.h. δ ist eine PMM-Lösung. □

Satz 45. *In subadditiven Domänen sind Vortäuschungen nicht sicher, d.h. für jede Begegnung und jeden produktmaximierenden Mechanismus über gemischten Vereinbarungen gibt es eine strikt positive Wahrscheinlichkeit, dass die Vortäuschung entdeckt wird.*

Beweis. Da es Alles-oder-Nichts-Vereinbarungen gibt, die PMM-Lösungen sind, kann der falsche Spieler die vorgetäuschte Aufgabe zugewiesen bekommen. □

Satz 46. *Für jede Begegnung in einer Task-orientierten Domäne ist die Verhandlungsmenge über gemischten Vereinbarungen nicht-leer.*

Beweis. Sei (T_1, T_2) eine Begegnung. Es ist zu zeigen, dass es eine individuell rationale und Pareto-optimale gemischte Vereinbarung gibt. Eine reine Vereinbarung erfüllt die **Minimum-Bedingung**, falls

$$\min_{i \in \{1,2\}} c(T_i) \geq \min_{i \in \{1,2\}} c(D_i)$$

und die **Summen-Bedingung**, falls

$$\sum_{i=1}^{2} c(T_i) \geq \sum_{i=1}^{2} c(D_i).$$

Es gilt bereits für alle individuell rationalen gemischten Vereinbarungen $(D_1, D_2) : p$, dass (D_1, D_2) beide Bedingungen erfüllt: da für $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} c(T_i) &\geq C_i((D_1, D_2) : p) \\ &= c(D_i) \cdot p + c(D_{3-i}) \cdot (1 - p) \\ &\geq \min_{\ell \in \{1,2\}} c(D_\ell) \end{aligned} \tag{8.1}$$

muss die Minimum-Bedingung erfüllt sein. Summiert man über 8.1 auf, erhält man, dass auch die Summen-Bedingung erfüllt ist:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} c(T_i) &\geq c(D_1) \cdot p + c(D_2) \cdot (1 - p) \\ &\quad + c(D_2) \cdot p + c(D_1) \cdot (1 - p) \\ &= c(D_1) + c(D_2) \end{aligned}$$

Konstruiere nun eine Vereinbarung: wähle dazu unter den reinen Vereinbarungen, die die Minimum- und Summen-Bedingungen erfüllen, ein Paar (D_1^*, D_2^*) mit minimalen Gesamtkosten, d.h. so, dass

$$c(D_1^*) + c(D_2^*) = \min\{\, c(D_1) + c(D_2) \mid D_1, D_2 \text{ erfüllen Minimum- und Summen-Bedingung} \,\}.$$

Da die Konfliktvereinbarung die Minimum- und Summen-Bedingungen erfüllt und es nur endlich viele reine Vereinbarungen gibt, existiert ein solches Paar. Betrachte nun die folgenden Fälle:

Fall 1: $c(T_i) \geq c(D_i^*)$ für $i = 1, 2$, d.h. $(D_1^*, D_2^*) : 1$ ist individuell rational.
Fall 2: $c(T_i) \leq c(D_i^*)$ für genau ein i, o.B.d.A. $i = 1$. Dann ist $(D_1^*, D_2^*) : p$ mit

$$p = 1 - \frac{c(T_1) - c(D_1^*)}{c(D_2^*) - c(D_1^*)}$$

individuell rational.

Nun kann man zeigen, dass $(D_1^*, D_2^*) : p$ Pareto-optimal unter den individuell rationalen Vereinbarungen ist. Denn angenommen, $(D_1', D_2') : q$ dominiert $(D_1^*, D_2^*) : p$. Da $(D_1', D_2') : q$ individuell rational ist, muss (D_1', D_2') die Minimum- und die Summen-Bedingung erfüllen. Außerdem gilt, da $(D_1', D_2') : q$ dominiert:

$$\sum_{i=1}^{2} U_i((D_1', D_2') : q) > \sum_{i=1}^{2} U_i((D_1^*, D_2^*) : p)$$

Dann folgt:

$$\sum_{i=1}^{2} c(D_i') < \sum_{i=1}^{2} c(D_i^*)$$

verletzt die Bedingung der minimalen Kosten. □

Literaturverzeichnis

[Bin92] Binmore, Ken: *Fun and Games.* D. C. Heath and Co., Lexington, MA, 1992.

[BTT89] Bartholdi, III, J., C. A. Tovey und M. A. Trick: *Voting Schemes for which It Can Be Difficult to Tell Who Won the Election.* Social Choice and Welfare, 6(2):157–165, 1989.

[CS03] Conitzer, Vincent und Tuomas Sandholm: *Complexity Results about Nash Equilibria.* In: Gottlob, Georg und Toby Walsh (Herausgeber): *Proceedings of the Eighteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI), Acapulco, Mexico*, Seiten 765–771. Morgan Kaufmann, 2003.

[FT91] Fudenberg, Drew und Jean Tirole: *Game Theory.* MIT Press, Cambridge, MA, 1991.

[Heu04] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis*, Band 2. Teubner, Stuttgart, dreizehnte Auflage, 2004.

[HI02] Holler, Manfred J. und Gerhard Illing: *Einführung in die Spieltheorie.* Springer-Verlag, Berlin, fünfte Auflage, 2002.

[NRTV07] Nisan, Noam, Tim Roughgarden, Éva Tardos und Vijay V. Vazirani (Herausgeber): *Algorithmic Game Theory.* Cambridge University Press, 2007.

[OR94] Osborne, Martin J. und Ariel Rubinstein: *A Course in Game Theory.* MIT Press, Cambridge, MA, 1994.

[Osb03] Osborne, Martin J.: *An Introduction to Game Theory.* Oxford University Press, 2003.

[RZ94] Rosenschein, Jeffrey S. und Gilad Zlotkin: *Rules of Encounter.* MIT Press, Cambridge, MA, 1994.

[vS02] von Stengel, Bernhard: *Computing Equilibria for Two-Person Games.* In: Aumann, Robert J. und Sergiu Hart (Herausgeber): *Handbook of Game Theory*, Band 3, Seiten 1723–1759. North-Holland, Amsterdam, 2002.