Def (Monotonie)

Ein Mech. für unbeirrbare Bieter heißt **monoton** falls ein Bieter, der mit (S^*, v^*) gewinnt, auch mit (S', v') gewinnt, falls $S' \subseteq S^*$ und $v' \geq v^*$.

Def (Kritische Bezahlung)

Eine Bezahlung heißt kritisch, wenn ein Bieter, der gewinnt, das Infimum der Werte bezahlt, die man zum Gewinnen benötigt.

Lemma Der Greedy-Mech. ist monoton, benutzt kritische Bezahlungen und Verlierer bezahlen nichts.

Bew:

Monotonie: Erhöhen von v_i^* oder das Verkleinern der Menge S_i^*, schiebt i in der Greedy-Reihenfolge nach vorne, d.h. i gewinnt weiterhin.

Kritische Bezahlung Bieter i gewinnt vor konkurrierende Bieter j (also $S_i^* \cap S_j^* \neq \emptyset$):

$$\frac{v_i^*}{\sqrt{|S_i^*|}} \geq \frac{v_j^*}{\sqrt{|S_j^*|}}$$

$$\leadsto \quad v_i^* \geq v_j^* \frac{\sqrt{|S_i^*|}}{\sqrt{|S_j^*|}} = \frac{v_j^*}{\sqrt{|S_j^*|/|S_i^*|}} = p_i$$

Verlierer zahlen nichts: Offensichtlich $\square$

Lemma Ein Mech für unbeirrbare Bieter, bei dem Verlierer nichts zahlen, der monoton ist und der kritische Bezahlungen verwendet, ist anreizkompatibel.

Bew:

1. Angabe des wahren Gebotes führt immer zu nicht-negativem Nutzen:
   a) Verliert der Bieter, hat er den Nutzen Null
   b) Gewinnt er, so ist der Nutzen $v^* - p^* \geq 0$, da p^* kritische Bezahlung ist, d.h. $v^* \geq p^*$.

2. (s', v') bringt keinen größeren Nutzen als wahres Gebot (s^*, v^*).

a) (s', v') verliert. Dann hat (s', v') kein höheren Nutzen: Entweder gewinnt (s^*, v^*) $\rightsquigarrow$ dann wohlmöglich höher Nutzen von (s^*, v^*). Ansonsten gleicher Nutzen.

b) $s' \ngeq s^*$. Dann kann (s^*, v^*) nur besser sein.

c) Sei $s' \geq s^*$ und (s', v') gewinnend.

c1) Wir zeigen (s^*, v') ist mind. so gut wie (s', v'): Sei p' die Bezahlg beim Gebot (s', v') und p die Bez. bei (s^*, v'). Für alle $x < p$ verliert das Gebot (s^*, x), da p kritische Bezahlg. Wg. Monotonie verliert auch (s', x). Also muss gelten $p' \geq p$. D.h. (s^*, v') gewinnt immer, wenn (s', v') gewinnt und der Preis bei (s^*, v') ist nicht höher.

c2) Wir zeigen: (s^*, v^*) ist mind. so gut wie (s^*, v'):
Zwei Fälle

c2.1) Angenommen, (s^*, v^*) gewinnt mit Bez. p^*. Falls $v' > p^*$, dann gewinnt (s^*, v') mit der gleichen Bez. Wenn $v' < p^*$, dann verliert (s^*, v') und hat Nutzen 0.

(2.2) (s^*, v^*) ist verlierend. Dann ist $v' > v^*$ und damit wird Nutzen negativ.

$\sqcap$

Korollar

Der Greedy-Mechanismus ist anreizkompatibel.

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\forall x_j, y_j \in \mathbb{R}: \sum_j x_j y_j \leq \sqrt{\sum_j x_j^2} \cdot \sqrt{\sum_j y_j^2}$$

Lemma Die soziale Wohlfahrt der vom Greedy-Mech. erzeugten Allokationen weichen maximal um den Faktor $\sqrt{m}$ vom Optimum ab.

Bew:

$W^* :=$ Menge der Gewinner im Optimum

$W :=$ Menge der Gewinner beim Greedy-Mech.

$W_i^* := \{ j \in W^* \mid j \geq i \text{ und } S_i^* \cap S_j^* \neq \emptyset \}$ ← Entweder $\{i\}$ falls $i \in W^*$ oder für $i \in W$: die Bieter die wg i nicht zum Zuge kamen

Beachte: $W^* \subseteq \bigcup_{i \in W} W_i^*$ ⇐ jedes $j \in W^*$ ist entweder in W oder es gibt ein i, wg. dem j nicht in W, also $j \in W_i^*$.

D.h. es reicht zu zeigen:

Für alle $i \in W$: $$\boxed{\sum_{j \in W_i^*} v_j^* \leq \sqrt{m}\, v_i^*} \qquad (\bullet)$$

Für alle $j \in W_i^*$ gilt: Da alle j's in der Greedy-Ordnung hinter i liegen:

$$v_j^* \leq v_i^* \frac{\sqrt{|S_j^*|}}{\sqrt{|S_i^*|}} \qquad (+)$$

$$(*) \qquad \sum_{j \in W_i^*} v_j \leq \frac{v_i^*}{\sqrt{|S_i^*|}} \sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j^*|}\,,$$

$$\left(x_j = 1,\ y_j = \sqrt{|S_j^*|} \right)$$

$$(**) \qquad \sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j^*|} \cdot 1 \leq \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} 1} \cdot \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j^*|} = \sqrt{|W_i^*|} \cdot \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j^*|}$$

$(***)$ Es gilt außerdem: $|W_i^*| \leq |S_i^*|$, da für alle $j_1, j_2 \in W_i^*$ gilt $S_{j_1}^* \cap S_{j_2} = \emptyset$ falls $j_1 \neq j_2$ und $j_1, j_2 \in W^*$ und W^* induziert Allokation.

$(****)$ Da W^* eine Allokation induziert gilt $\sum_{j \in W_i^*} |S_j^*| \leq m$

$$\sum_{j \in W_i^*} v_j^* \leq \frac{v_i^*}{\sqrt{|S_i^*|}} \cdot \sum_{j \in W_i^*} \sqrt{|S_j^*|}$$

$$\leq \frac{v_i^*}{\sqrt{|S_i^*|}} \cdot \sqrt{|W_i^*|} \cdot \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j^*|}$$

$$\leq v_i^* \cdot \sqrt{\sum_{j \in W_i^*} |S_j^*|} \leq v_i^* \cdot \sqrt{m}$$

D.h. mit (*) folgt: $\sum_{i \in W^*} v_i^* \leq \sqrt{m} \sum_{j \in W} v_j^*$. □

<u>Satz</u> Der Greedy-Mech. für unbeirrbare Bieter ist effizient berechenbar, anreizkompatibel und erzeugt Allokationen, deren soziale Wohlfahrt eine $\sqrt{m}$-Approximation des Optimums sind.

<u>Bew</u>: Folgt aus den Lemmata.
