Umgekehrte Auktion (reverse Auction)

Ein Käufer will ein Objekt kaufen, das von mehreren Anbietern angeboten wird.

Bewertung:

Anbieter i hat Kosten w_i, wenn er verkauft, d.h.

v_i (i wins) $= -w_i$

v_i (i - looses) $= 0$

Maximiere $\sum_i v_i(a) \rightsquigarrow$ wähle i mit dem niedrigsten Gebot

Mit CP-Regel bekommt dann der Anbieter, der gewinnt, als Bezahlung: den zweit-niedrigsten Preis.

Kommunikationskosten in einem Netzwerk

Komm.-Netzwerk $G = (V, E)$, in dem jede Kante ein eigener Spieler ist. Jedem Spieler e entstehen Kosten c_e, falls die Kante für Komm. benutzt wird.

Für eine Nachricht, die von s nach t soll, muss ein Pfad gewählt werden.

Der Mechanismus soll die Kosten minimieren über Menge der Alternativen $A = \{ p \mid p \text{ ist Pfad von } s \text{ nach } t \}$.

Kosten von Pfad p: $\sum_{e \in p} c_e$

Bewertung für einzelnen Spieler e:

$$v_e(p) = 0 \quad \text{falls } e \notin p$$

$$v_e(p) = -c_e \quad \text{falls } e \in p$$

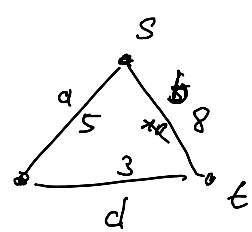
CP-Preis $p_e(v_1, \dots, v_n) = h_e(v_{-e}) - \sum_{f \neq e} v_f(p)$ $\quad p = f(v_1, \dots, v_n)$

$$h_e(v_{-e}) = \max_{p' \in G'} \sum_{e' \in p'} -c_{e'}$$

$G' = (V, E - \{e\})$

Falls $e \notin p$, dann ist $p_e(v_1, \dots, v_n) = 0$

Falls $e \in p$, dann ist $p_e(v_1, \dots, v_n) \leq 0 \Rightarrow$ D.h. e bekommt eine Auszahlung



$p_1 = (a, d)$ hat Kosten 8

$p_2 = (b)$ hat Kosten 10

a muss bezahlen $-\cancel{10}\,8 - (-3) = -\cancel{7}\,5$
d.h. bekommt 7 Einheiten

d muss bezahlen $-\cancel{10}\,8 - (-5) = -\cancel{5}\,3$
d.h. er bekommt 5 Einheiten,

b bleibt außen vor

Kombinatorische Auktionen

Auktionen, bei denen auf "Bündel" geboten werden kann.

- Lande- und Startslots auf Flughäfen
- Spektrumsauktion (es werden Frequenzen in einem bestimmten geographischen Gebiet versteigert) für Mobilfunkanbieter
- Logistik (umgekehrte Auktionen)
- Aufgabenverteilung für Robotergruppen

$G = \{1, \dots, m\}$ Güter

$N = \{1, \dots, n\}$ Bieter

Bewertung $v_i : 2^G \to \mathbb{R}$ mit $v_i(\emptyset) = 0$, $\underbrace{v_i(S) \leq v_i(T)}_{\text{Monoton}}$ falls $S \subseteq T$

Subadditivität (Ersetzbarkeit)

Für $S \cap T = \emptyset$: $v_i(S \cup T) < v_i(S) + v_i(T)$

Superadditivität (Ergänzung)

Für $S \cap T = \emptyset$: $v_i(S \cup T) > v_i(S) + v_i(T)$

Allokation

$(S_1, \ldots, S_n)$ heißt <u>Allokation</u> falls $S_i \subseteq G$, und $S_i \cap S_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die soziale Wohlfahrt der Allokation ist

$$\sum_i v_i(S_i).$$

Gewinner- / Allokationsproblem

Bestimme eine sozial effiziente (= die soz. Wohlfahrt maximierende) Allokation

Probleme

- Berechenbarkeitskomplexität für die Allokation
- Repräsentationskomplexität für jeden Spieler
- Kommunikationsproblem
- Strategien: können wir das Ganze <u>anreizkompatibel</u> gestalten?

Ein einfacher Fall: Der unteilbare Bieter (single-minded bidder)

Eine Bewertung v_i heißt unteilbar, falls es $v_i^* \in \mathbb{R}$ und $S_i^* \subseteq G$ gibt und es gilt

$$v_i(S) = v_i^* \quad \text{für alle } S \supseteq S_i^*$$

$$v_i(S) = 0 \quad \text{sonst}$$

⇝ einfach repräsentierbar und einfach kommunizierbar.

→ Tatsächlich ist das Allokationsproblem NP-vollst.

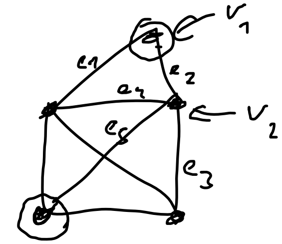
Allokationsproblem für unteilbare Bieter (APUB)

Eingabe: (S_i^*, v_i^*) für alle $i = 1, .., n$

Ausgabe: $W \subseteq \{1, .., n\}$, so dass $S_i \cap S_j = \emptyset$ für alle $i, j \in W$ mit $i \neq j$ und $\sum_{i \in W} v_i^*$ ist maximal.

Satz Das zu APUB ex. Entscheidungsproblem ist NP-vollst.

NP-Härte: Reduktion von INDEPENDENT-SET ($G = (V, E)$ und Zahl k gegeben. Gibt es $V' \subseteq V$ mit $|V'| \geq k$ und $(v, w) \notin E$ für alle $v, w \in V'$.)



$S_1^* = \{e_1, e_2\}$

$S_2^* = \{e_2, e_3, e_4, e_5\}$

Gegeben IS-Instanz setze $G = E$ und $N = V$, wobei $v_i^* = 1$, $S_i^* = \{e \mid i \in e\}$. Sei $(S_1, \ldots, S_n)$ eine optimale Allokation.

$S_i \cap S_j = \emptyset$ gdw. i und j haben keine gemeinsame Kante. D.h. die Knoten, die den Gewinnern entsprechen haben keine gemeinsamen Kanten → d.h. sie bilden ein IS! Da die Zuweisung optimal ist, müssen wir ob wir k erreichen können.

$\in$ NP: Entscheidungsproblem, ob es eine Allokation $\geq k$ gibt, kann durch "Raten und Verifizieren" gelöst werden. $\square$

- Spezialfälle
- Heuristiken
- Approximation

Allokation $(S_1, .., S_n)$ ist eine c-Approximation der optimalen Allokation $(T_1, .., T_n)$, falls $\sum_i v_i(T_i) \leq c \cdot \sum_i v_i(S_i)$

wir wissen über IS:

Es gibt kein Polynomialzeit-Approx. ($P \neq NP$) mit ein Faktor der besser ist als $n^{1-\varepsilon}$.

Da $m \leq n^2$:

Satz

Eine Approximation der opt. Allokation für unbeirrbare Bieter besser als mit dem Faktor $m^{1/2-\varepsilon}$ ist NP-hart.

⇝ Tatsächlich gibt es solch eine Approximation

⇝ Auch für vollst. Methode, die die opt. Lösung bestimmen, kann Problem der Größenordnung ein paar Tausend lösen.