Multi-Unit-Auktionen

k identische Objekte, Bietermenge I mit $|I| = n > k$.
Jeder Bieter will max. 1 Objekt, d.h. die Alternativenmenge $A = \{ S\text{-wins} \mid S \subset I, |S| = k \}$

$$v_i(S) = \begin{cases} w_i & \text{für } i \in S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(w_i ist die Bewertung, die Spieler i dem Objekt zuordnet)

soz. Wohlfahrt soll maximiert werden: maximiere $\sum_i v_i(S)$,
d.h. wähle die k Bieter aus mit den k höchsten Gebote.
→ Gewinner bezahlen den $k+1$-höchsten Preis.

Mit Clarke-Pivot-Regel

$$h_i(v_{-i}) = \max_{a \in A} \sum_{j \neq i} v_j(a) = \begin{cases} \sum_{j \in S} w_j & \text{falls } i \notin S \text{ (ist Verlierer)} \\ \sum_{j \in S} w_j - w_i + w_{k+1} & \text{falls } i \in S \text{ (ist Gewinner)} \end{cases}$$

$$p_i(v_1, \dots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \dots, v_n))$$

$$= \begin{cases} \sum_{j \in S} w_j - \sum_{j \in S} w_j = 0 & \text{für den Fall } i \notin S \\ \sum_{j \in S} w_j - w_i + w_{k+1} - \sum_{j \in S} w_j - w_i = w_{k+1} & \text{für den Fall } i \in S \end{cases}$$

Was passiert, wenn ein Bieter mehr als 1 Objekt ersteigern kann?
Was passiert, wenn es verschiedene Objekte gibt?
→ kombinatorische Auktionen

Öffentliches Projekt

Kosten für die Regierung: C
Nutzen für jeden Bürger i: w_i

Projekt soll durchgeführt werden, wenn $\sum_i w_i \geq C$
Nimm Regierung als Spieler dazu: R
$A = \{\text{project}, \text{noproject}\}$ mit

$v_R(\text{project}) = -C$ $\quad v_R(\text{noproject}) = 0$
$v_i(\text{project}) = w_i$ $\quad v_i(\text{noproject}) = 0$

Maximiere $\sum_i v_i(a) + v_R(a)$
- $-v_R(a) > \sum_i v_i(a) \rightarrow a = \text{noproject}$
- $-v_R(a) \leq \sum_i v_i(a) \rightarrow a = \text{project}$

Clarke-Pivot-Regel.
Für jeden Bürger:

$$h_i(v_{-i}) = \max_{a \in A} \Big(\sum_{j \neq i} v_j(a) + v_R(a) \Big) = \begin{cases} \sum_{j \neq i} w_j - C & \text{falls } \sum_{j \neq i} w_j \geq C = -v_R(a) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$p_i(v_1, \dots, v_n) = \begin{cases} \sum_{j \neq i} w_j - C - \sum_{j \neq i} w_j - C = 0 & a = \text{project und findet statt ohne } i \\ 0 - \sum_{j \neq i} w_j - C & \end{cases}$$

$$= C - \sum_{j \neq i} w_j \qquad a = \text{project und Projekt findet nur statt, wenn } i \text{ dabei ist}$$

Insgesamt $w_i \geq C - \sum_{j \neq i} w_j$
D.h. i bezahlt nicht alles, sondern nur den Unterschied zwischen Summe der anderen und Projektkosten.
(Wenn $a = \text{noproject}$, kommt überall 0 raus).

Falls nicht $\sum_i w_i = C$, ist $\sum_i p_i(\dots) < C$, d.h.
die Projektkosten können nicht aus den Bezahlungen der Mitspieler geleistet.
⇝ Subventionierung.