Mechanismus-Design

Statt Präferenzrelationen, Bewertungen $v_i: A \to \mathbb{R}$

V_i ist die Menge aller möglichen Bewertungen für Spieler i (entsprechend zu L)

⇝ Vergleichbarkeit verschiedener Ergebnisse.

Außerdem „Preise" p_i

Individueller Nutzen: $u_i(a) := \underline{v_i(a)} - p_i(\ldots\ldots)$

Meistens soll Gruppennutzen (soz. Wohlfahrt) maximiert werden: Maximiere $\sum_i v_i(a)$

Def (direkt offenbarender Mechanismus)
Ein <u>direkt offenbarender Mechanismus</u> ist eine soz. Entscheidungsfkt $f: V_1 \times \dots \times V_n \to A$ und ein Vektor von Preisfkt $(p_1, \dots, p_n)$, mit $p_i: V_1 \times \dots \times V_n \to \mathbb{R}$ ist der Preis, den Spieler i bezahlen muss.

Def (anreizkomp. Mechanismus)

Ein Mech $(f, p_1, \dots, p_n)$ heißt <u>anreizkomp.</u>, falls für alle $i = 1, \dots, n$ und alle Präferenzen $v_1, \dots, v_n, v_i'$ gilt:
$$v_i(f(v_i, v_{-i})) - \boxed{p_i(v_i, v_{-i})} \geq v_i(f(v_i', v_{-i})) - p_i(v_i', v_{-i}).$$

D.h. es ist sinnlos v_i' (unehrliche Bewertung) anzugeben.

Def (VCG) Ein Mech. $(f, p_1, \dots, p_n)$ heißt <u>Vickrey-Clarke-Groves-Mech.</u> falls

1. $f(v_1, \dots, v_2) \in \arg\max_{a \in A} \sum_{i=1}^{n} v_i(a)$
2. es ex. Fkt. $h_1, \dots, h_n$ mit $h_i: V_{-i} \to \mathbb{R}$, so dass
$$p_i(v_1, \dots, v_n) = \boxed{h_i(v_{-i})} - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \dots, v_n))$$

Das ist ein Term, den Spieler i als konstante ansehen kann.

D.h.
$$u_i(f(v_1, \dots, v_n)) = v_i(f(v_1, \dots, v_n)) - p_i(v_1, \dots, v_n)$$
$$= v_i(f(v_1, \dots, v_n)) - \left(h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \dots, v_n))\right)$$
$$= v_i(f(v_1, \dots, v_n)) - \boxed{c + \sum_{j \neq i} v_j(f(v_1, \dots, v_n))}$$
$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} v_i(f(v_1, \dots, v_n))}_{\text{soz. Wohlfahrt}} - c$$

Satz VCG-Mechanismen sind anreizkompatibel.

Bew: Seien i, v_{-i}, v_i und v_i' gegeben.

Sei $a = f(v_i, v_{-i})$ und $a' = f(v_i', v_{-i})$.

Nutzen:

$u_i(a') = \boxed{v_i(a') + \sum_{j \neq i} v_j(a')} - h(v_{-i})$ bei Deklaration v_i'

$u_i(a) = \boxed{v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a)} - h(v_{-i})$ bei — " — v_i

$$\sum_{i=1}^{n} (v_i(a)) \overset{?}{\geq} \sum_{i=1}^{n} (v_i(a'))$$

Das ist der Fall, da VCG-Mechanismus immer die Alternative a auswählt, die die soz. Wohlfahrt maximiert. □

Bsp. Vickrey-Auktion (second price, sealed bid)

N Spieler, $A = N$

$$v_i(a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a \neq i \\ w_i, & \text{falls } a = i \end{cases}$$

Falls $p(v_1, \dots, v_n) = 0$, würde jeder beliebig hohe Werte für w_i angeben, um als Gewinner ausgewählt. Tatsächlich: wir wollen die soz. Wohlfahrt maximieren, in dem wir den als Gewinner auswählen, der das Objekt am meisten schätzt: maximiere $\sum v_i(a)$.

Der Preis $\underbrace{-\sum_{j \neq i} v_j(i)}_{= 0} + \underbrace{\max_{j \neq i} v_i(j)}_{= h_i}$.

Wie kann man ein vernünftiges h_i festlegen?

Eine Möglichkeit wäre: $h_i(v_{-i}) = 0$.

Bsp Bei Vickrey-Auktion:

Gewinner bezahlt nix: $p_i(v_1,\dots,v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j\neq i} v_j(i) = 0$

Nicht-Gewinner $\qquad$ " 0 " $\qquad$ w_k "

Clarke-Pivot-Regel

2 wichtige Bedingungen

→ Ein Mech. heißt (ex-post) individuell rational, falls alle Spieler immer eine nicht-negative Auszahlung erhalten: $u_i(f(v_1,\dots,v_n)) = v_i(f(v_1,\dots,v_n)) - p(v_1,\dots,v_n) \geq 0$

→ Ein Mech. hat keinen positiven Transfer, falls kein Geld an die Spieler bezahlt wird, d.h. $p_i(v_1,\dots,v_n) \geq 0$.

Def (Clarke-Pivot-Fkt.)

$h_i(v_{-i}) = \max_{b\in A} \sum_{j\neq i} v_j(b)$ heißt Clarke-Pivot-Fkt.

$p_i(v_1,\dots,v_n) = \boxed{\max_{b\in A} \sum_{j\neq i} v_j(b) - \sum_{j\neq i} v_j(f(v_1,\dots,v_n))}$ heißt Clarke-Pivot Preis.

D.h. Spieler i bezahlt als Preis den Unterschied, der sich durch die Beteiligung von i ergibt.

Bsp: Zwei Sp. 1, 2, zwei Alt. a, b

$v_1(a) = 10 \qquad v_2(a) = 9$

$v_1(b) = 5 \qquad v_2(b) = 25$

Für Sp. 1 alleine, würde VCG-Mech. Alt. a auswählen. soz. Nutzen: 10

Für Sp. 1 und 2: Alt. b, weil der soz. Nutzen $5+25=30$ ist $\geq 10+9$

Preis für den Spieler 1: $25 - 25 = 0$.

Preis für den Spieler 2: $10 - 5 = 5$.

Satz Ein VCG-Mech mit Clarke-Pivot-Preisen macht keine pos. Transfers. Für $v_i(a) \geq 0$ $\forall v_i$ und $\forall a\in A$ ist der Mech. auch individuell rational.

Bew: (1) keine pos. Transfers.

Sei $a = f(v_1,\dots,v_n)$ die Alternative die $\sum_j v_j(a)$ maximiert und b sei die Alt., die $\sum_{j\neq i} v_j(b)$ max.

Damit gilt $\sum_{j\neq i} v_j(b) \geq \sum_{j\neq i} v_j(a)$, da $b \in \operatorname{argmax}_{c\in A} \sum_{j\neq i} v_j(c)$

(2) Indiv. Rat.:

$$u_i(a) = v_i(a) + \sum_{j\neq i} v_j(a) - \sum_{j\neq i} v_j(b)$$

$$\geq \cancel{v_i(a)} \sum_j v_j(a) - \sum_j v_j(b) \qquad (\text{da } v_i(b) \geq 0)$$

$$\geq 0 \qquad (\text{da } \textstyle\sum v_j(a) \text{ maximal})$$

□

Bsp. Vickrey-Auktion

$h_i(v_{-i}) = \sum_{j\neq i} v_j(b)$ für b gibt den max Wert

für Gewinner ist das das zweithöchste Gebot.

für Verlierer ist das das höchste Gebot

$$p() = h_i() - \sum_{j\neq i} v_j f(v_1,\dots,v_n))$$