Def (Erweiterung)

Die Erweiterung von f zu ~~einer soz. Wohlfahrtsfkt.~~ F ist def:

$$F(\prec_1, \ldots, \prec_n) = \prec \text{ mit } \underline{a \prec b} \text{ gdw.}$$

$$\underline{f}(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}}) = b \quad \forall a, b \quad a \neq b$$

Lemma Falls f eine anreizkomp. und surjektive soz. Entscheidungsfkt. ist, so ist ihre Erweiterung zu F tatsächlich eine soz. Wohlfahrtsfkt.

Bew: D.h. zu zeigen, dass $\prec$ total, asymmetrisch und transitiv ist.

(1) Totalität: wg. Top-Präferenz gilt: $f(\prec_1^{\{a,b\}}, \ldots, \prec_n^{\{a,b\}}) = a$ oder $= b$, deshalb $a \prec b$ oder $b \prec a$ ✓

(2) Asymmetrie: nur eines gilt (s.o.)

(3) Transitivität: Angenommen $\prec$ ist nicht trans.

D.h. es ex. a, b, c mit $a < b$, $b < c$, $a \not< c$ (das gleiche mit $c < a$). Sei $S = \{a, b, c\}$ mit ObdA $f(<_1^S, \dots, <_n^S) = c$. Wg. Monotonie folgt bei schrittweiser Änderung von $<_i^{\{a,b,c\}}$ zu $<_i^{\{a,c\}}$ $f(<_1^{\{a,c\}}, \dots, <_n^{\{a,c\}}) = c$. D.h. $a < c$ $\Rightarrow$ Widerspruch zur Ann., dass $<$ nicht transitiv. $\square$

Lemma (Erweiterungslemma)

Falls f eine anreizkomp., surjektive und nicht-diktatorische soz. Entscheidungsfkt. ist, so erfüllt ihre Erweiterung F Einstimmigkeit, UIA und Nicht-Diktatur.

Bew

(1) Einstimmigkeit: Sei $a <_i b$ für alle i.

Dann gilt $\left(<_i^{\{a,b\}}\right)^{\{b\}} = <_i^{\{a,b\}}$

Wg. Top-Präferenz und Monotonie gilt

$$f(<_1^{\{a,b\}}, \dots, <_n^{\{a,b\}}) = f\left((<_1^{\{a,b\}})^{\{b\}}, \dots, (<_n^{\{a,b\}})^{\{b\}}\right) = b$$

D.h. $a < b$ ✓

(2) UIA: Falls $a <_i b$ gdw. $a <_i' b$ $\forall i$, dann muss

$$f(<_1^{\{a,b\}}, \dots, <_n^{\{a,b\}}) = f(<_1'^{\{a,b\}}, \dots, <_n'^{\{a,b\}})$$ gelten.

Wg. Monotonie können wir schrittweise $<_i^{\{a,b\}}$ in $<_i'^{\{a,b\}}$ ändern, ohne dass sich das Ergebnis von $f(\ )$ ändert.

(3) Nicht-Diktatur: Sei f nicht-diktatorisch, aber F ist diktatorisch, d.h. $a < b$ falls $a <_i b$ für alle $a, b \in A$ für Diktator i. Dann gilt $f(<_1, \dots, <_i, \dots <_n) = b$ falls $a <_i b$ $\forall a \neq b$. Widerspruch.

Satz (Gibbard-Satterthwaite)

Falls f eine anreizkomp. und surjektive soz. Entscheidungsfkt. über mehr als 2 Alternativen ist, so ist f diktatorisch.

Bew: Reduktion auf Arrow.

Mechanismus + Mechanismusdesign